SERIE DE COMPENDIOS SCHAUM

TEORIA Y PROBLEMAS

DE

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

McGRAW-HILL

PROLOGO

Este libro se ideó principalmente como complemento a los textos básicos de geometría descriptiva, basado en la firme convicción del autor de que un gran número de problemas resueltos constituyen uno de los mejores medios para aclarar y fijar en la mente los principios básicos. Por otra parte, la presentación de la teoría y de los fundamentos es tan completa, que con una adecuada distribución del tiempo de prácticas de laboratorio, este libro también podría usarse como texto.

En muchas facultades técnicas y de ingeniería se dicta el mismo curso de geometría descriptiva a estudiantes de ingeniería y de ciencias, quienes tienen que hacer las mismas prácticas y asistir a las mismas clases de laboratorio para resolver los mismos tipos de problemas. Este libro por tanto pretende presentar de una manera sencilla los principios básicos que el autor considera parte necesaria y vital en la enseñanza de los estudiantes de ciencias y de ingeniería. Una concienzuda comprensión de estos aspectos fundamentales del análisis gráfico es suficiente para desarrollar las facultades del estudiante para resolver los problemas gráficos más difíciles con que tropiece más tarde en su propio campo de trabajo.

No se pretende ampliar todos los aspectos comprendidos dentro de este extenso campo de estudio porque, primero que todo (y desafortunadamente), en muchas facultades de ingeniería, solamente se asigna un tiempo mínimo para el estudio de la geometría descriptiva; en segundo lugar, la variedad de intereses y las necesidades de cada departamento hacen necesario que solo los puntos fundamentales de interés para la mayoría de los estudiantes de ingeniería y de ciencias sean incluidos en un curso básico.

La materia expuesta está dividida en capítulos que abarcan diferentes áreas de teoría y de estudio. Cada capítulo comienza con la exposición de definiciones oportunas, fundamentos y teoremas, conjuntamente con material ilustrativo y descriptivo. A esto le sigue un orden gradual de problemas resueltos y propuestos. Los problemas resueltos ilustran y amplían la teoría, exponen métodos de análisis, proporcionan ejemplos prácticos, y se les ha dado un enfoque tal, que permiten al estudiante aplicar correcta y confiadamente los principios básicos. La mayoría de los problemas prácticos son analizados y resueltos paso por paso para asegurar un completo entendimiento por parte del estudiante. Debe mencionarse, sin embargo, que las soluciones no tienen que hallarse, generalmente, por un método en particular. La mayor parte de los problemas podrían ser resueltos por varios sistemas, todos de acuerdo con los principios del análisis gráfico.

El autor desea reconocer la cooperación prestada por los miembros de su personal administrativo, cuya ayuda fue inapreciable. El profesor H. L. McKee y el señor Joseph Parris fueron especialmente útiles en la selección de los problemas. También la señora Caroline Horey y los señores Roger Mohrlang, Henry Carmichael, Lynn Shaeffer y Chi Tsau, quienes cortésmente colaboraron en la impresión del manuscrito y los dibujos. Un reconocimiento especial para el señor Nicola Miracapillo, editor asociado de la casa editorial, y al señor Henry Hayden editor artístico, por sus valiosas insinuaciones y su espíritu de colaboración. Y, finalmente, extiendo un cordial agradecimiento a mi esposa y a mis hijos por su disposición y estímulo durante los largos meses en que se estuvo preparando el manuscrito.

M. C. Hawk

TABLA DE MATERIAS

Capítulo 1 **DIBUJOS ORTOGONALES** 1

Introducción. Definiciones. Dibujos en varias vistas. Notación. Vistas relacionadas. Visualización. Presentación de los problemas.

Capítulo 2 **VISTAS FUNDAMENTALES — PUNTO, LINEA Y PLANO** ... 21

Localización de un punto o una línea en las vistas principales. Proyectar un punto situado sobre una línea, de una vista a otra, cuando la línea es paralela a un plano principal. Localizar un punto sobre un plano. Vistas fundamentales. Longitud verdadera de una línea recta. Pendiente verdadera de una línea recta. Dibujar las vistas de una línea, dados su longitud verdadera, su pendiente y su rumbo. Línea recta que figura como un punto. Plano que aparece como un filo. Pendiente verdadera de un plano. Plano que aparece en su forma y tamaño verdaderos. Localizar una figura plana dada en un plano dado. Trazar un círculo de diámetro dado sobre un plano oblicuo.

Capítulo 3 **LINEAS CRUZADAS** 53

Teoremas sobre líneas y planos. Líneas cruzadas. Dibujar un plano que contenga a una línea dada y sea paralelo a otra línea dada. Determinar la distancia más corta entre dos líneas que se cruzan. Determinar la distancia horizontal más corta entre dos líneas que se cruzan. Determinar la línea más corta de pendiente dada que une dos líneas que se cruzan.

Capítulo 4 **PUNTOS DE PENETRACION E INTERSECCION DE PLANOS** 73

Determinar el punto donde una línea corta a un plano. Intersección de planos.

Capítulo 5 **PERPENDICULARIDAD: LINEAS Y PLANOS** 85

Proyección de un punto sobre un plano. Proyección de una línea sobre un plano. Distancia más corta de un punto a una línea. Trazar una línea perpendicular a un plano. Línea más corta con declive dado desde un punto hasta un plano. Construir un plano que contenga a un punto dado y a una perpendicular a una línea dada. Construir un plano que contenga a una línea dada y a una perpendicular a un plano dado. Construir un plano que pase por un punto dado y sea perpendicular a dos planos dados.

Capítulo 6 **ANGULO DIEDRO Y ANGULO ENTRE UNA LINEA Y UN PLANO** 101

Angulo diedro. Determinar el ángulo entre una línea y un plano.

Capítulo 7 **REVOLUCION** 115

Principios básicos de la revolución. Encontrar la longitud verdadera de una línea. Encontrar el tamaño verdadero de un plano. Encontrar el ángulo diedro. Encontrar el ángulo formado entre una línea y un plano. Encontrar una línea que forme ángulos determinados con dos planos principales.

Capítulo 8 **INTERSECCION Y DESARROLLO** 132

Definiciones. Determinar los puntos en que una línea recta atraviesa a un cilindro. Intersección de un plano y un prisma. Intersección de prismas. Intersección de un prisma y una pirámide. Intersección de un cono y un prisma. Intersección de dos cilindros. Intersección de un cilindro y un cono. Intersección de dos conos circulares rectos que tienen sus bases paralelas. Desarrollo de un prisma. Desarrollo de una pirámide recta. Desarrollo de una pirámide oblicua. Desarrollo de un cilindro circular recto. Desarrollo de un cilindro oblicuo. Desarrollo de un cono circular recto. Desarrollo de un cono oblicuo. Transiciones — adaptadores cuadrado a cuadrado, rectangular a circular.

Capítulo 9 **PROBLEMAS DE MINERIA Y TOPOGRAFIA** 164

Definiciones. Determinar el rumbo y el buzamiento de un mapa dado. Determinar el rumbo, buzamiento, afloramiento y espesor de una vena. Determinar el rumbo, buzamiento y espesor de una vena utilizando dos pozos de sondeo no paralelos. Método abreviado del geólogo para encontrar el buzamiento aparente cuando se conoce el buzamiento verdadero y el rumbo. Desmontes y terraplenes. Términos utilizados en desmontes y terraplenes.

Capítulo 10 **GEOMETRIA VECTORIAL** 181

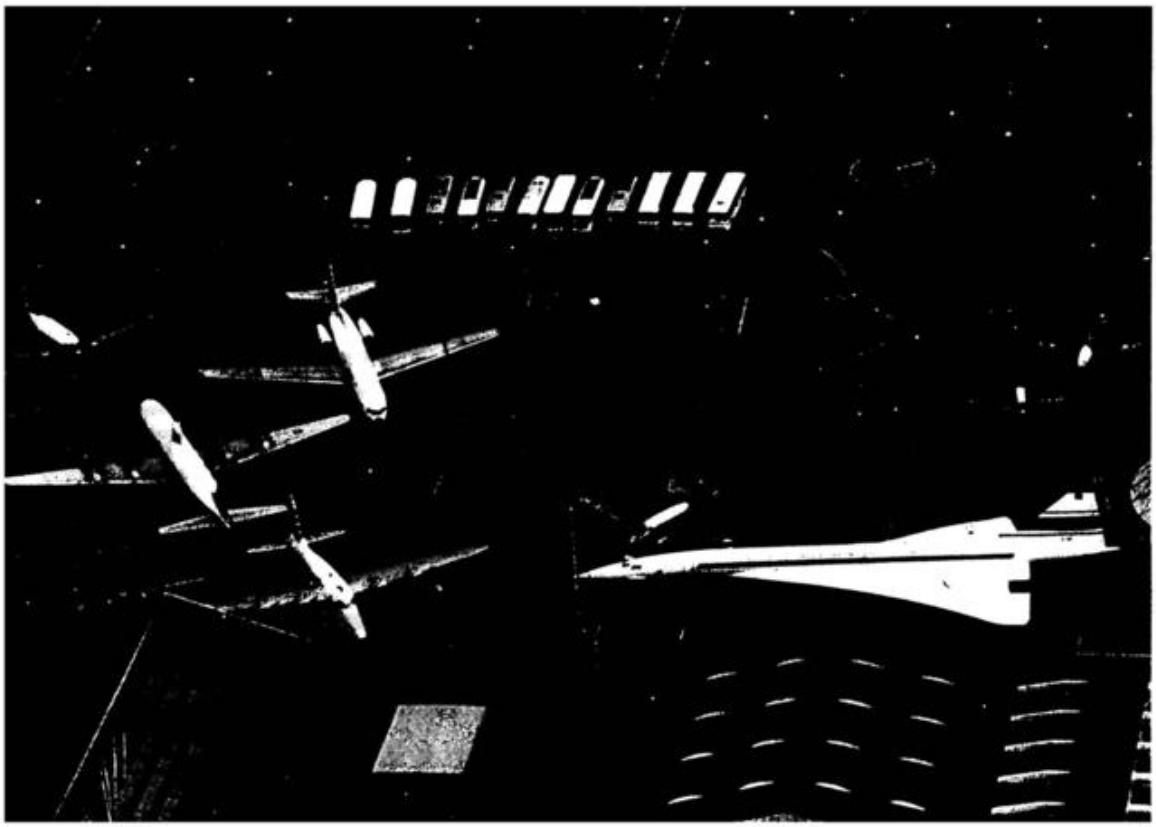
Definiciones. Principios fundamentales sobre vectores. Resultante de vectores coplanares concurrentes. Resultante de vectores coplanares no concurrentes. Resultante de vectores concurrentes no coplanares. Descomposición de un vector en dos componentes coplanares. Descomposición de un vector en tres componentes concurrentes no coplanares.

APENDICE **207**

A.1 Trazar una paralela o perpendicular a una recta dada.
A.2 Dividir una línea recta en un número cualquiera de partes iguales.
A.3 Trazar el círculo inscrito a un triángulo.
A.4 Trazar el círculo circunscrito a un triángulo.
A.5 Trazar una elipse aproximada.
A.6 Construir un polígono regular en un círculo dado.
A.7 Trazar un arco de radio dado, tangente a dos líneas rectas.
A.8 Trazar una línea tangente a un círculo desde un punto exterior.
A.9 Desenvolver la circunferencia de un círculo.
A.10 Construir un exágono en un círculo dado.
A.11 Medir un ángulo por su tangente natural.

BIBLIOGRAFIA **211**

INDICE **213**



Capítulo 1

Dibujos ortogonales

1.1 INTRODUCCION

El dibujo ortogonal es básico para todo dibujo de ingeniería, como también lo es para el estudio de la geometría descriptiva. Un ingeniero o un técnico debidamente preparado debe estar capacitado para tomar cualquier dibujo y entenderlo. Este entendimiento comprende necesariamente los fundamentos básicos del dibujo ortogonal.

En general, un curso de dibujo de ingeniería consiste en dibujar varios objetos en dos o más vistas, utilizando los principios de las proyecciones ortogonales. Estas vistas pueden ser proyectadas sobre los tres planos principales —horizontal, frontal y de perfil— o sobre planos auxiliares. A su vez estas vistas pueden ser o no cortadas. Un curso básico de dibujo de ingeniería incluiría también problemas sobre dibujos pictóricos, diseños a mano alzada, dibujos de tuberías, dibujos de trabajo, etc.

Muchos estudiantes que entran a una facultad de ingeniería han tenido poca experiencia con el dibujo ortogonal en el bachillerato o en la escuela técnica que los ha preparado para la universidad. Esta experiencia puedé haberse reducido únicamente a unas pocas semanas de dibujo mecánico; sin embargo, este contacto previo con los fundamentos del dibujo ortogonal forma una buena base de referencia que, por regla general, resulta valiosa en la resolución de los problemas de dibujo de ingeniería. Desafortunadamente muy pocos estudiantes universitarios han sido iniciados en los fundamentos básicos de la geometría descriptiva antes de entrar a la facultad de ingeniería.

Se podría hacer entonces la pregunta, "Bien, ¿qué es geometría descriptiva?" Definiéndola muy brevemente, geometría descriptiva es la solución gráfica de problemas de puntos, líneas y planos situados en el espacio. Estas soluciones se realizan por medio de los mismos principios del dibujo ortogonal que se utilizan en hacer un dibujo sencillo en tres vistas. Por tanto, el estudiante que desee comprender la geometría descriptiva debe también familiarizarse con los principios básicos del dibujo elemental de ingeniería. En otras palabras, la geometría descriptiva es la solución gráfica de los problemas más avanzados del dibujo de ingeniería. Tanto la geometría descriptiva como el dibujo de ingeniería utilizan los principios fundamentales del dibujo ortogonal.

1.2 DEFINICIONES

Los siguientes términos se usan frecuentemente a través de este texto y por lo tanto es imperativo un concienzudo entendimiento de sus significados para un estudio adecuado de la geometría descriptiva.

(*1*) *Proyección ortogonal* — la proyección que se obtiene al utilizar líneas de mira paralelas que forman 90° con un plano de imagen.

(2) *Plano de imagen* — el plano que es perpendicular a las líneas de mira. Este plano está localizado entre el ojo del observador y el objeto que está siendo mirado.

(*3*) *Línea de mira* — la trayectoria desde el ojo del observador hasta un punto particular sobre el objeto. Estas líneas de mira son paralelas.

(*4*) *Plano horizontal* — un plano de imagen cuyos puntos están todos a la misma elevación [Ver la Fig. 1-1(*a*)]. La parte superior o vista de planta se determina por la proyección

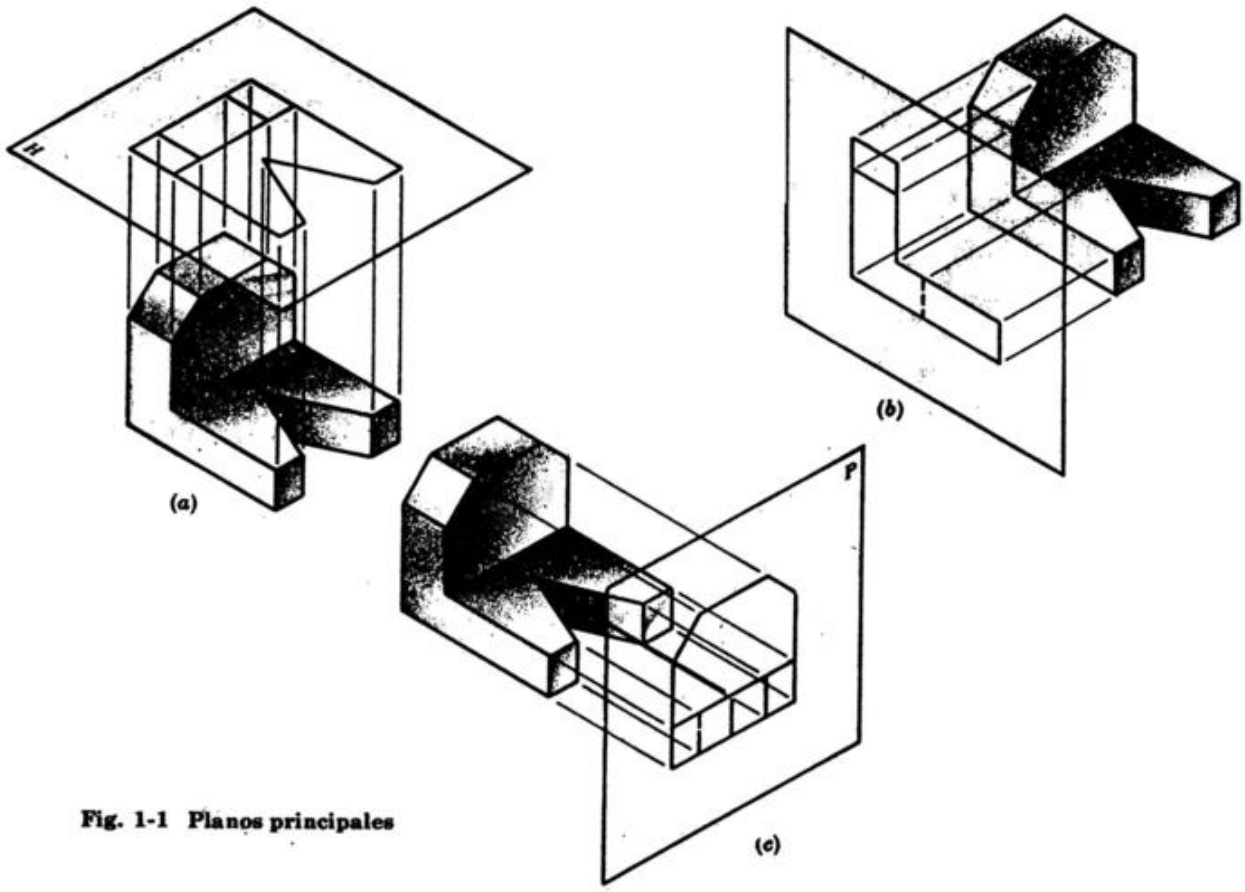


Fig. 1-1 Planos principales

del objeto sobre este plano. Las líneas de mira para este plano son verticales y por lo tanto perpendiculares a él.

(5) *Plano frontal* — un plano de imagen a 90° con los planos horizontal y de perfil [Ver la Fig. 1-1(*b*)]. La vista de elevación frontal es determinada por la proyección del objeto sobre este plano. Las líneas de mira para este plano frontal son horizontales y por tanto perpendiculares a él.

(6) *Plano de perfil* — un plano de imagen en ángulo recto con los planos horizontal y frontal [Ver la Fig. 1-1(*c*)]. Las vistas de elevación derecha e izquierda son determinadas por la proyección del objeto sobre este plano. Las líneas de mira para este plano de perfil son horizontales y por tanto perpendiculares a él.

(7) *Línea de pliegue o línea plano de referencia* — la línea formada por la intersección de dos planos de imagen. Se representa por medio de una línea larga, dos rayas cortas y luego otra línea larga.

(8) *Vista de elevación* — cualquier vista ortogonal para la cual las líneas de mira son horizontales y perpendiculares al plano de imagen. Puede ser proyectada de una vista de planta, de otras vistas de elevación o de vistas inclinadas. Cualquier vista proyectada de la vista de planta debe ser una vista de elevación.

(9) *Vista inclinada* — cualquier vista ortogonal para la cual las líneas de mira no son ni horizontales ni verticales. Puede ser proyectada de una vista de elevación o de otras vistas inclinadas pero nunca de una vista de planta.

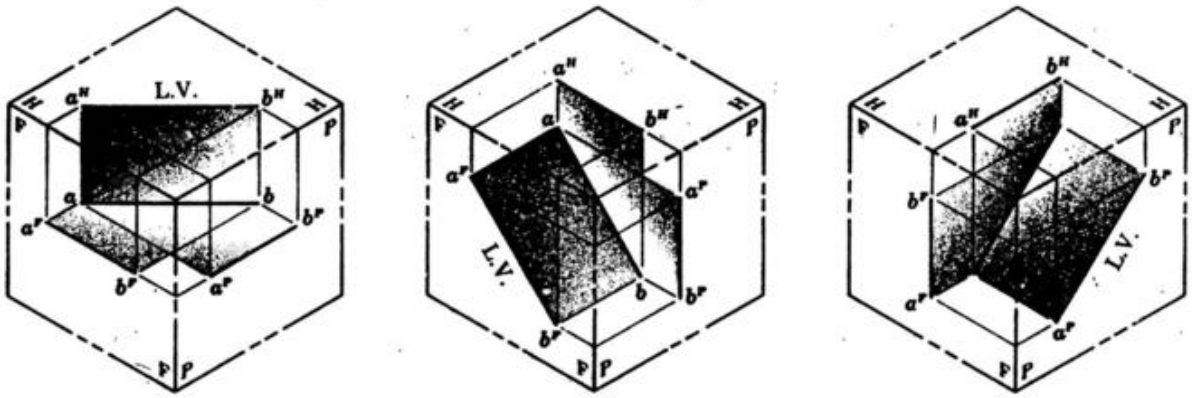
(10) *Línea* — la trayectoria de un punto que se mueve.

(11) *Línea recta* — la trayectoria de un punto que se mueve, avanzando siempre en la misma dirección. Una línea que tiene una longitud definida es determinada por sus extremos. Sin embargo, dos puntos cualesquiera sobre la línea pueden ser tomados para

el propósito de localizar la línea completa en otra vista. La vista del extremo de una línea es un punto que representa todos los puntos de la línea.

(12) *Línea de nivel* — una línea paralela al plano de imagen horizontal y por tanto tiene todos sus puntos a la misma elevación. Aparecerá en su longitud verdadera en la vista de planta. [Ver la Fig. 1-2(*a*)].

(13) *Línea frontal* — una línea trazada paralela al plano de imagen frontal. La línea debe verse siempre en su longitud verdadera en la vista frontal, ya se trate de una línea de nivel, de una línea vertical o de una línea inclinada. [Ver la Fig. 1-2(*b*)].



(*a*) Línea de nivel (*b*) Línea frontal (*c*) Línea de perfil

Fig. 1-2.

(14) *Línea de perfil* — una línea inclinada que se traza paralela al plano de imagen de perfil. La línea debe mostrarse siempre en su longitud verdadera en la vista de perfil. [Ver la Fig. 1-2(*c*)].

(15) *Línea vertical* — una línea que es perpendicular a un plano de nivel. Aparecerá en su longitud verdadera en cualquier vista de elevación.

(16) *Línea inclinada* — una línea que no es ni vertical ni horizontal pero que puede aparecer en su longitud verdadera en el plano frontal o en un plano de perfil. No puede aparecer nunca en su longitud verdadera en la vista de planta.

(17) *Línea oblicua* — una línea que es inclinada con respecto a los tres planos principales. No puede aparecer nunca en su longitud verdadera en ninguno de los tres planos principales.

(18) *Curva de nivel* — una línea recta o curva utilizada en dibujos topográficos, que localiza una serie de puntos a la misma elevación. Por tanto una curva de nivel es una línea de nivel. [Ver la Fig. 1-3].

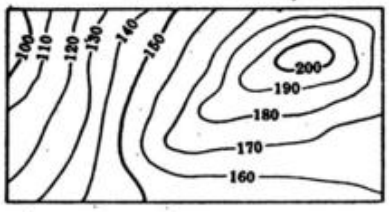


Fig. 1-3. Curvas de nivel

(19) *Rumbo* — el ángulo medido en la vista de planta entre una línea cualquiera y una línea trazada de norte a sur. Se supone siempre que el norte está en la parte superior de la hoja del dibujo, a menos que se indique otra dirección por medio de una flecha colocada sobre el dibujo. Generalmente se toma como rumbo el ángulo agudo. En la Fig. 1-4(*a*) la línea *AB* tiene un rumbo de S 45° E. Esto significa que la línea esta situada 45° al este de la línea sur. Si se toma el rumbo de *B* a *A* se expresa como N 45° O. El

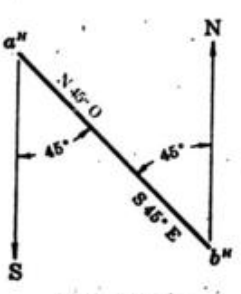


Fig. 1-4(*a*). Rumbo de una línea

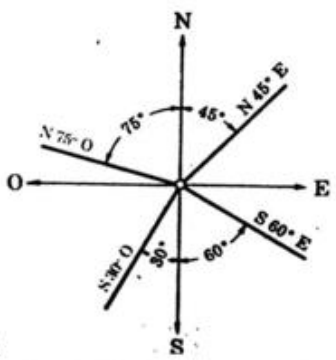


Fig. 1-4(*b*) Ejemplos de rumbos

rumbo se puede establecer únicamente en la vista de planta y no se afecta por el hecho de que la línea sea de nivel o inclinada. La Fig. 1-4(*b*) muestra algunos ejemplos de rumbo.

(*20*) *Vista normal de una línea o un plano* — la vista que muestra la longitud verdadera de una línea o las dimensiones verdaderas de un plano. La vista normal de un plano muestra la amplitud verdadera de cualquier ángulo formado sobre el plano y la longitud verdadera de cualquier línea perteneciente al plano.

(*21*) *Pendiente de una línea* — tangente del ángulo que forma una línea con un plano horizontal. Deben satisfacerse dos condiciones para determinar la pendiente de una línea: Primera, la línea debe ser mostrada en una vista de elevación; segunda, la línea debe aparecer en su longitud verdadera en esta vista de elevación. *Nota:* Una vista inclinada puede mostrar la longitud verdadera de una línea, pero no puede mostrar la pendiente verdadera de la línea porque un plano horizontal no puede aparecer como un filo en la vista inclinada.

1.3 DIBUJOS EN VARIAS VISTAS

Por dibujos en varias vistas queremos dar a entender una disposición lógica de dos o más vistas ortogonales de un objeto, hecha sobre una sola hoja de papel. La relación entre vistas tiene lugar cuando dos vistas son proyectadas sobre planos de imagen perpendiculares entre sí.

Antes de que un ingeniero pueda dibujar un objeto situado en el espacio, ya sea éste una línea, un plano o una combinación de líneas y planos, debe estar capacitado para formarse una idea clara del objeto. Una vez que ha establecido la posición del objeto en su mente, imagina que se mueve alrededor del objeto hasta asegurarse de cuáles vistas necesita para la comprensión completa del objeto observado. Este es llamado el método "directo" o "método del cambio de posición" del dibujo.

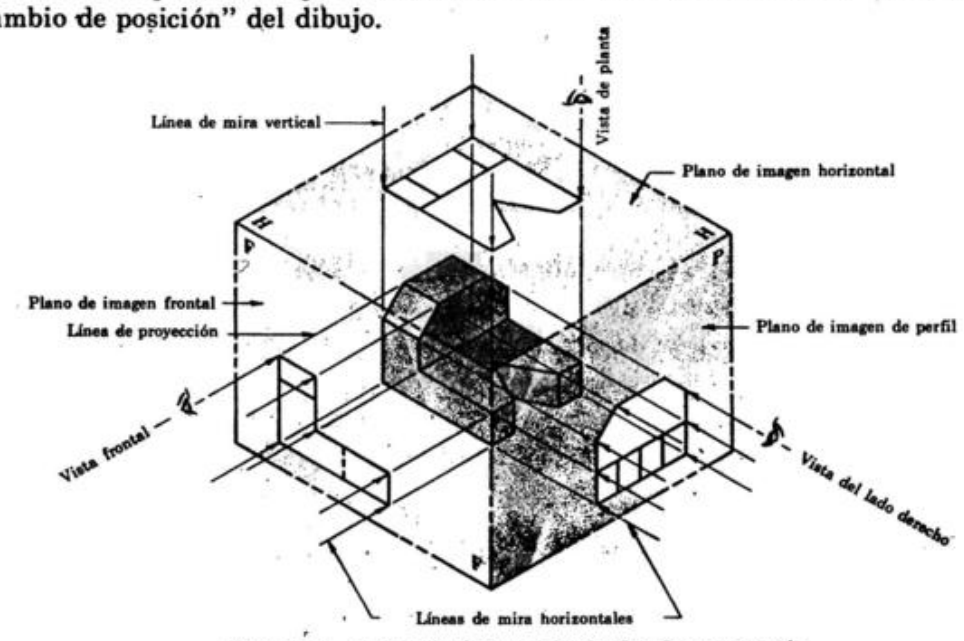


Fig. 1-5. Los tres planos principales de proyección

En la Fig. 1-5 para obtener una vista del lado derecho del bloque, el observador debe imaginar que tiene a su izquierda la posición frontal del bloque y está ahora mirando el bloque desde la posición del lado derecho. Su línea de mira es perpendicular al plano de imagen de perfil y es horizontal, de la misma manera que en la vista frontal.

Si el observador mira el objeto desde una posición cualquiera tomada alrededor del objeto, conservando horizontal la línea de mira, obtendrá una vista de elevación, ya que las alturas de todos los puntos del objeto permanecerán invariables. Las vistas frontal, posterior, del lado izquierdo y del lado derecho son vistas de elevación. De igual manera, cualquier

vista intermedia entre estas cuatro posiciones que tenga líneas de mira horizontales es llamada vista de elevación auxiliar.

En la Fig. 1-5 tenemos un objeto colocado detrás del plano frontal, a la izquierda del plano de perfil y debajo del plano horizontal. Esta posición en el espacio se refiere a una proyección en tercer ángulo que constituye prácticamente la base de todos los dibujos de ingeniería en los Estados Unidos. En el sistema de proyección en tercer ángulo el plano de imagen se supone localizado entre el observador y el objeto. En la proyección en tercer ángulo el bloque mostrado en la Fig. 1-5 tendrá seis vistas fundamentales, como se muestra en la Fig. 1-6.

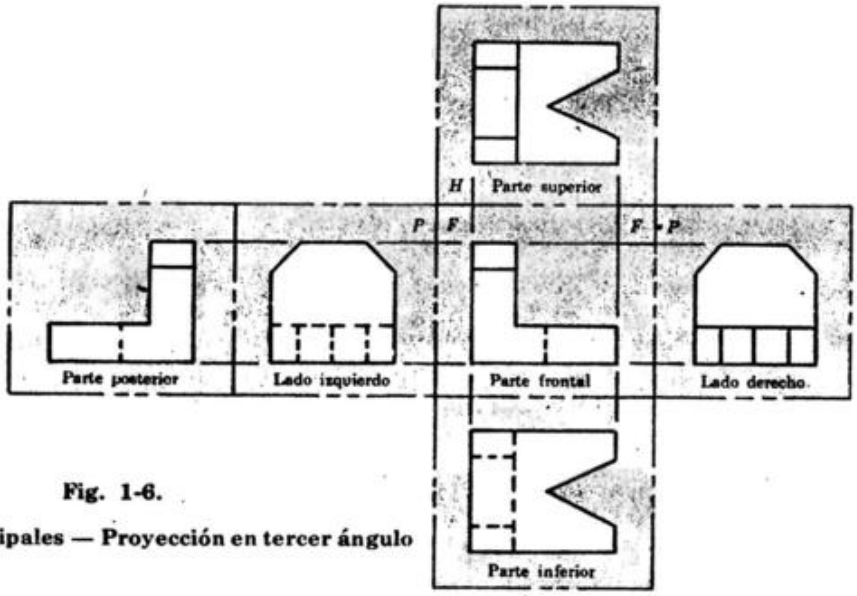


Fig. 1-6.

Seis vistas principales — Proyección en tercer ángulo

En casi todos los países extranjeros, así como en algunos dibujos arquitectónicos y de estructuras en los Estados Unidos se emplea la proyección en primer ángulo. En la proyección en primer ángulo el objeto se imagina localizado entre el observador y el plano de imagen. La Fig. 1-7 muestra las seis vistas fundamentales de nuestro bloque como se dibujarían utilizando el sistema de proyección en primer ángulo.

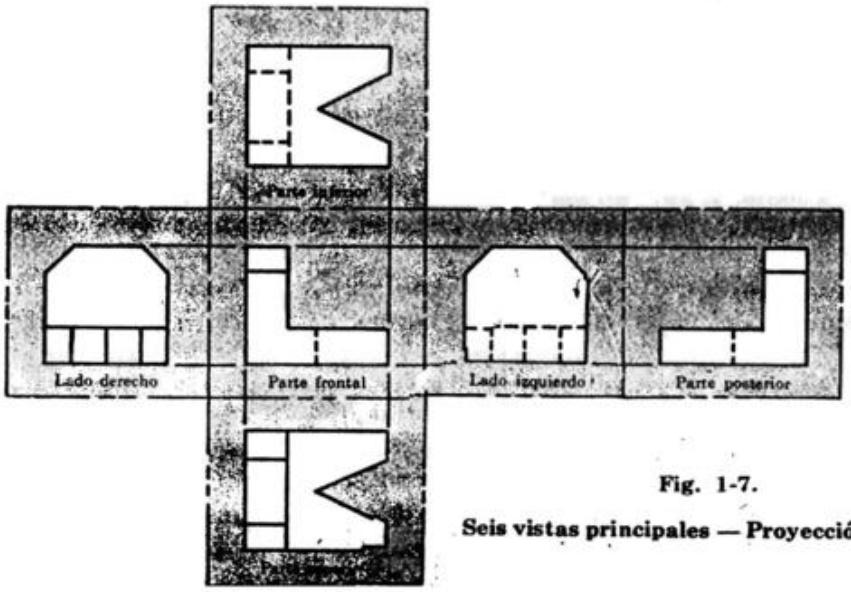


Fig. 1-7.

Seis vistas principales — Proyección en primer ángulo

Ahora bien, puesto que casi todos los dibujos ortogonales necesitan tres vistas, y debido a que estas vistas son mutuamente perpendiculares, se hace necesario girar dos de los planos de imagen hasta colocarlos en el plano del tercer plano de imagen. Estos tres planos de imagen pueden situarse ahora en sus posiciones relativas sobre un solo plano en la hoja de papel. El método utilizado comúnmente en un curso de dibujo de ingeniería consiste en mantener fija la posición del plano frontal y girar el plano horizontal 90° alrededor del eje horizontal *H-F* hasta alinearlo con el plano frontal. Luego se gira el plano de perfil 90° alrededor del eje vertical *F-P* hasta que coincida con el plano de imagen frontal y la posición girada del plano de imagen horizontal. Este método hace ver el objeto, como se muestra en la Fig. 1-8, con la vista de planta en la parte superior, la vista frontal debajo y la vista de perfil proyectada de la vista frontal. Es obvio que las relaciones tridimensionales entre las vistas son tales, que las vistas frontal y de planta muestran la longitud del objeto, las vistas frontal y de perfil muestran la altura del objeto y las vistas de planta y de perfil muestran el espesor del objeto.

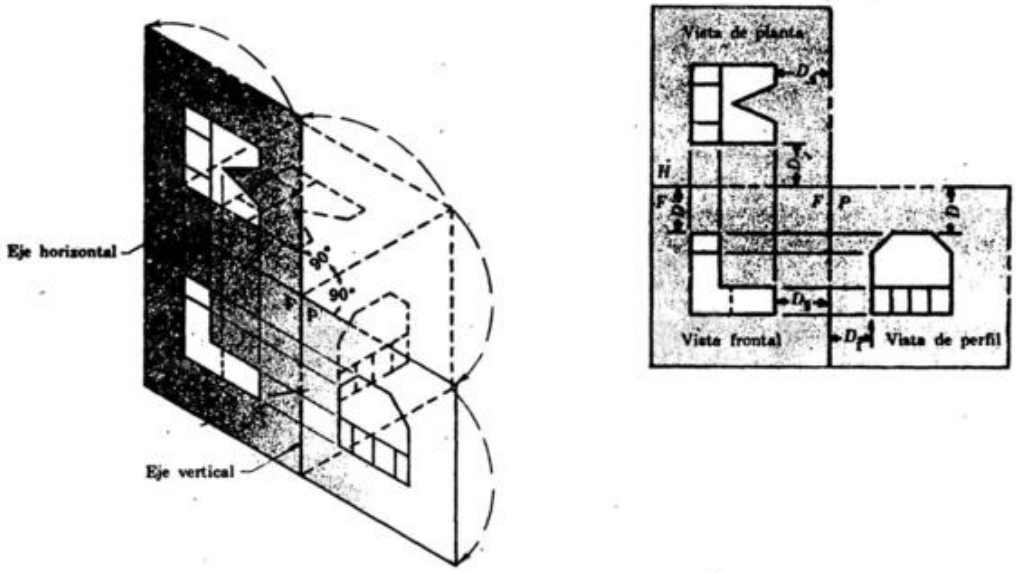


Fig. 1-8. Rotación de los planos horizontal y de perfil hasta que coincidan con el plano frontal

En la Fig. 1-8 debe observarse que la distancia de la parte superior del bloque al plano de imagen horizontal es igual en las vistas frontal y de perfil. Esto también es cierto para cualquier vista de elevación que esté relacionada directamente con la vista de planta. La distancia entre el bloque y el plano de imagen frontal es igual en las vistas de planta y de perfil. Estos hechos son muy importantes y forman la base para el traslado de distancias de una vista a otra. La distancia del bloque al plano de imagen de perfil es igual en los planos frontal y de planta.

Una variante del método mencionado anteriormente consiste en mantener fija la posición de la vista de planta y girar entonces los planos de imagen frontal y de perfil hasta que queden colocados en el mismo plano, con el plano de imagen horizontal.

La Fig. 1-9 muestra esta variante que sitúa la vista de planta en la parte superior, la vista frontal debajo y la vista de perfil está ahora proyectada de la vista de planta. Ambos métodos son correctos y el estudiante puede utilizar a voluntad cualquiera de los dos para resolver los problemas, a menos que los datos dados hagán más práctico el uso de un método en particular.

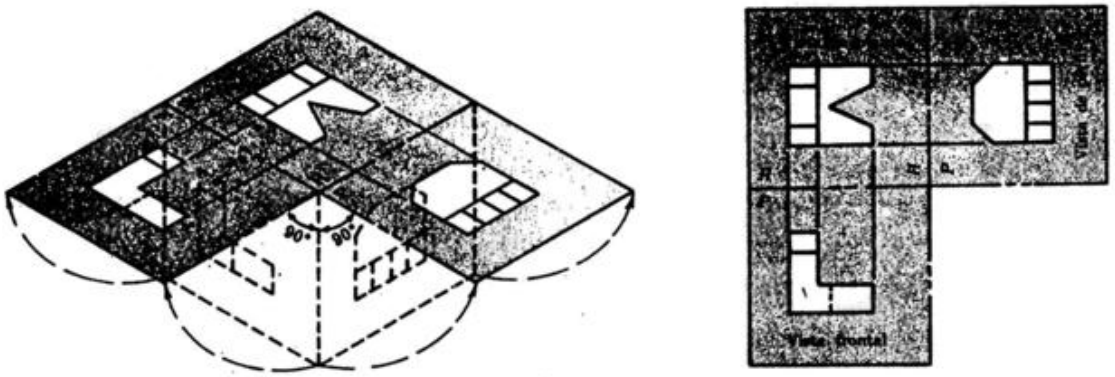


Fig. 1-9. Rotación de los planos frontal y de perfil hasta que coincidan con el plano horizontal

1.4 NOTACION

Puesto que en la mayoría de los casos este libro se utiliza como texto complementario, es muy posible que el sistema de notación utilizado por el autor sea diferente del utilizado por el estudiante en su curso de geometría descriptiva. La Fig. 1-10 muestra varios métodos de notación recomendados por diferentes autores de textos de geometría descriptiva. Sin embargo, aunque los sistemas de notación sean diferentes, todos los métodos de resolución de problemas están basados en los mismos principios fundamentales.

Como puede observarse en las Figs. 1-8 y 1-9, la intersección de los planos de imagen horizontal y frontal se designa colocando la letra *H* en el lado que muestra la vista de planta y la letra *F* en el lado que nos da la vista frontal. De igual manera, la intersección de las vistas de planta y de perfil se designa colocando la letra *H* del lado correspondiente a la vista de planta y la letra *P* se coloca al lado de la vista de perfil. Si la vista de perfil es proyectada de la vista frontal, la letra *F* es colocada del lado de la línea de intersección correspondiente al plano frontal y la letra *P* en el lado del plano de perfil.

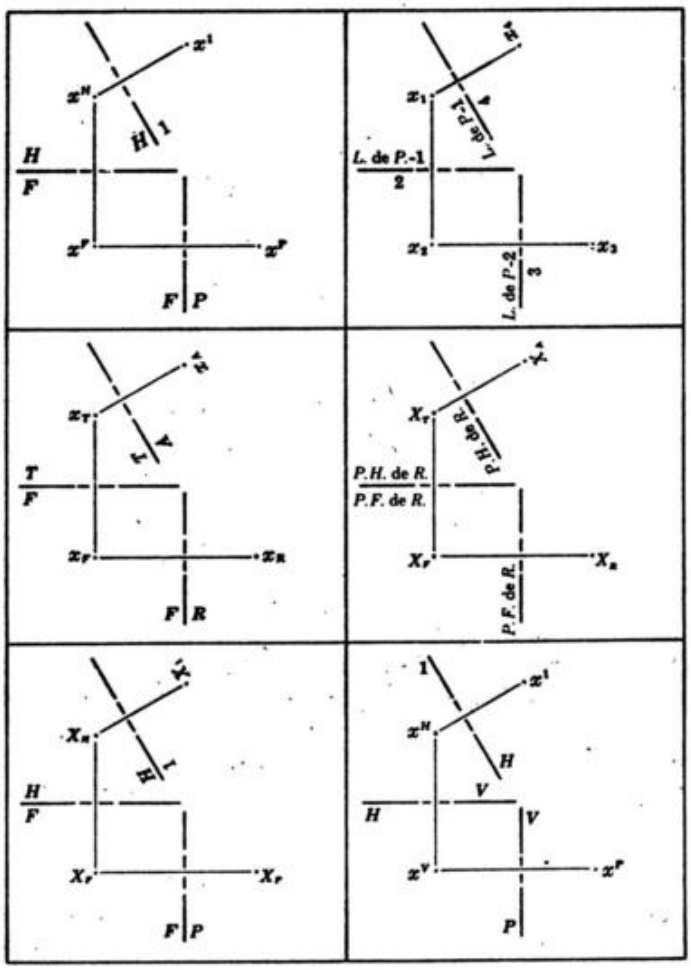


Fig. 1-10.
Diferentes sistemas de notación

Debido a que la mayor parte de los problemas de geometría descriptiva exigen vistas proyectadas sobre planos distintos de los tres planos principales (*H, F, P*), se hace necesario designar estas líneas de intersección adicionales por medio de algún sistema lógico. El autor sugiere el uso de números para designar estos planos de imagen adicionales. En la Fig. 1-11 hacemos una demostración de este sistema. La vista de elevación auxiliar proyectada de la vista de planta se designa como vista 1, y la línea de pliegue entre las dos vistas es designada como *H*-1. Una vista inclinada es proyectada de la vista frontal y es designada como vista 2 y la línea de pliegue entre las dos vistas se designa como *F*-2. Este sistema ofrece un medio adecuado a quien desee conocer el procedimiento exacto seguido para hallar la solución de un problema.

Las líneas planos de referencia o líneas de pliegue se representan por una línea larga separada por dos rayas cortas. Esta línea debe ser oscura pero bastante delgada para que garantice suficiente exactitud cuando se miden distancias desde ella. En algunos problemas, según la escala utilizada, el uso de líneas de referencia gruesas puede causar errores repetidamente y, en consecuencia, las respuestas halladas por el estudiante pueden ser muy diferentes de las respuestas correctas.

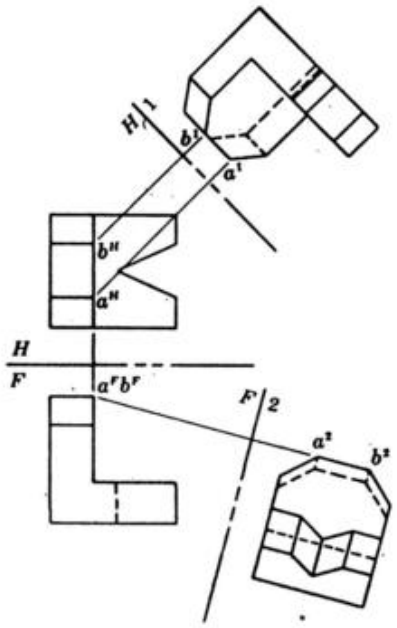


Fig. 1-11.
Notación de la línea *AB*

Cuando se hace referencia a una línea en el espacio, se utilizan letras mayúsculas para designarla, tal como la línea *AB* mostrada en la Fig. 1-11. Sin embargo, los puntos individuales localizados sobre una vista son designados con una letra minúscula, la cual tiene una letra o un número a manera de exponente, que indica la vista sobre la cual está localizado el punto. Si los puntos están localizados sobre uno cualquiera de los tres planos principales, tendrán como exponentes pequeñas letras mayúsculas. Para un punto que ha sido girado se seguirá el mismo procedimiento mencionado anteriormente, pero tendrá además una letra minúscula *r* como subíndice del punto.

1.5 VISTAS RELACIONADAS

Uno de los principios más importantes de la geometría descriptiva que el estudiante debe comprender a conciencia es la relación entre vistas. Esta relación se establece cuando sus planos de imagen son perpendiculares el uno al otro y tienen una línea de referencia localiza-

Vistas	Relacionada con la vista
P, *F*, 1, 3	*H* (de planta)
H, 2	*F* (Frontal)
H, 4	3 (De elevación auxiliar)
3, 5	4 (Inclinada)

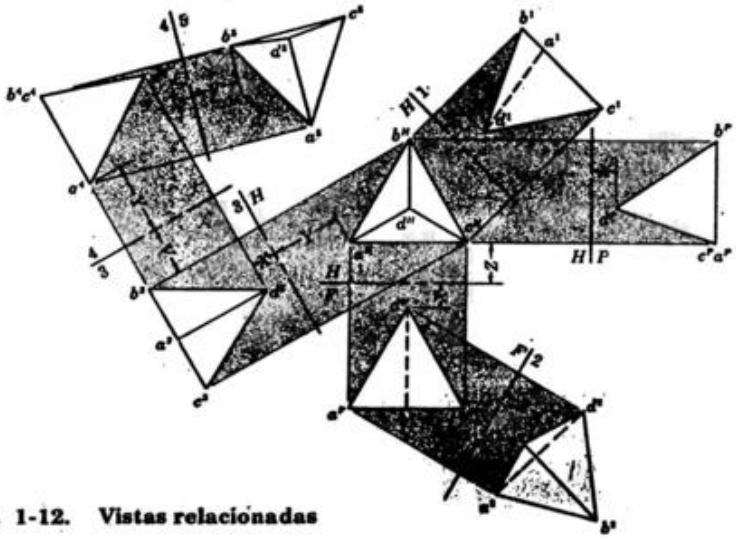


Fig. 1-12. Vistas relacionadas

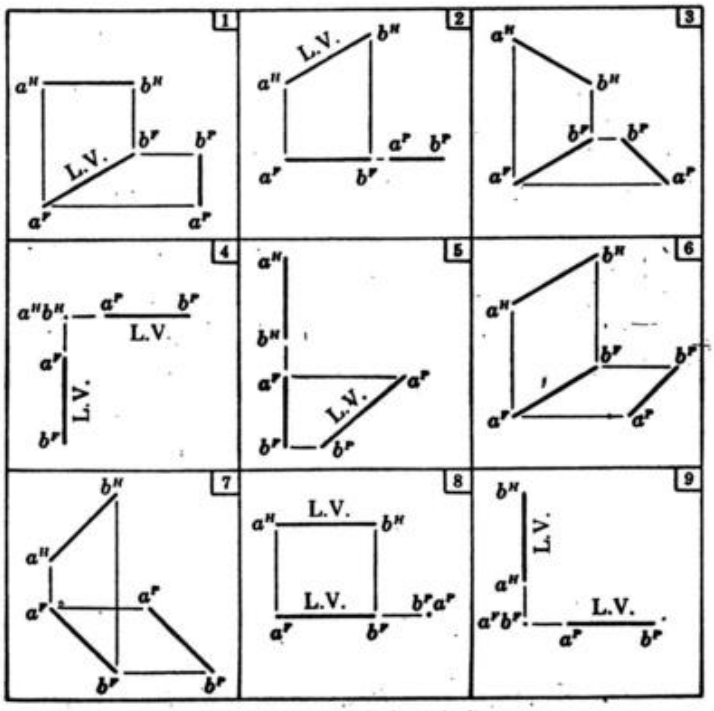
da entre ellos. Cuando dos vistas están relacionadas, las dos vistas de un punto cualquiera están localizadas sobre la misma línea de proyección, la cual es perpendicular a la línea de referencia trazada entre las dos vistas.

En la Fig. 1-12 tenemos varias vistas de un objeto sencillo. Usted observará que la localización de un punto está a la misma distancia de la línea de referencia para "una vista sí y otra no". La distancia X en la vista de perfil es la misma distancia X en la vista frontal y en las vistas de elevación auxiliares. La distancia Y en la vista inclinada 4 es igual que en la vista de planta. La distancia Z en la vista inclinada 2 es idéntica a la distancia Z medida en la vista de planta. Por tanto se puede expresar como norma que en todas las vistas que están relacionadas con una vista común, cualquier punto localizado sobre un objeto está a la misma distancia de la línea de referencia. También se observa en la Fig. 1-12 que todas las vistas adyacentes a la vista de planta muestran la altura verdadera del objeto. La tabla muestra cuáles vistas están relacionadas entre sí.

1.6 VISUALIZACION

Muchos estudiantes de ingeniería y de ciencias son capaces de seguir ciertas reglas y patrones generales pero cuando se ven forzados a representar en su mente una imagen clara de un detalle quedan sin saber qué hacer. Este es generalmente el resultado de un estudio inadecuado de la visualización de los principios básicos relacionados con líneas y planos.

LINEAS. Según su dirección, las líneas rectas pueden clasificarse en verticales, horizontales e inclinadas. La Fig. 1-13 muestra la posición de varias líneas en el espacio. Se sugiere al estudiante que trate de visualizar las diferentes posiciones de la línea AB sujetando un lápiz para indicar las direcciones mostradas. En (1) hemos mostrado una línea frontal inclinada que aparece en su verdadera longitud en la vista frontal. En (2) la línea horizontal aparece en su verdadera longitud en la vista de planta. La línea oblicua en (3) no aparece en su verdadera longitud en ninguna de las tres vistas principales. En (4) la línea vertical aparecerá como un punto en la vista de planta y aparecerá en su verdadera longitud tanto en la vista frontal como en la vista de perfil. La línea de perfil en (5) aparecerá en su verdadera



Nota: Se han omitido las líneas de pliegue

Fig. 1-13. Visualización de líneas

longitud en la vista de perfil. En las vistas (6) y (7) la línea oblicua no aparece en su verdadera longitud en ninguna de las tres vistas dadas. En (8) la línea horizontal-frontal aparece en su verdadera longitud tanto en la vista de planta como en la vista frontal de elevación. La línea horizontal en (9) aparece como un punto en la vista frontal y en su verdadera longitud tanto en la vista de planta como en la vista de perfil.

PLANOS. Según su visualización los planos se pueden clasificar en horizontales, verticales e inclinados. Debe aclararse que toda superficie plana puede aparecer como un filo, o bien como un plano de forma similar. En otras palabras, una superficie triangular aparecerá siempre como un filo (una línea) o como un triángulo. De igual manera, un plano de forma cuadrada debe aparecer siempre como un filo o como un plano de cuatro lados. Este plano de cuatro lados será siempre un cuadrado, un rectángulo o un paralelogramo.

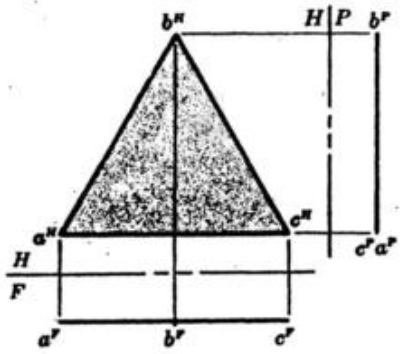


Fig. 1-14. Plano horizontal

En la Fig. 1-14 tenemos tres vistas principales de un plano horizontal. El plano se representa como un filo tanto en la vista frontal como en la vista de perfil, así como también en cualquier otra vista de elevación, mientras que el tamaño verdadero de cualquier plano horizontal aparecerá en la vista de planta.

La Fig. 1-15 muestra tres posiciones posibles de un plano vertical. En (*a*) tenemos un plano vertical que es paralelo al plano de imagen frontal; por esta razón tendrá su tamaño verdadero en la vista frontal. Se representa como un filo tanto en la vista de planta como en la vista de perfil. El plano vertical en (*b*) es paralelo al plano de imagen de perfil y se representa como un filo tanto en la vista de planta como en la vista frontal. El tamaño verdadero del plano aparece en la vista de perfil. En (*c*) el plano vertical está inclinado respecto al plano de imagen frontal y respecto al plano de imagen de perfil; por tanto la vista de planta muestra el plano como un filo y el tamaño verdadero del plano no es mostrado en ninguna de las tres vistas dadas.

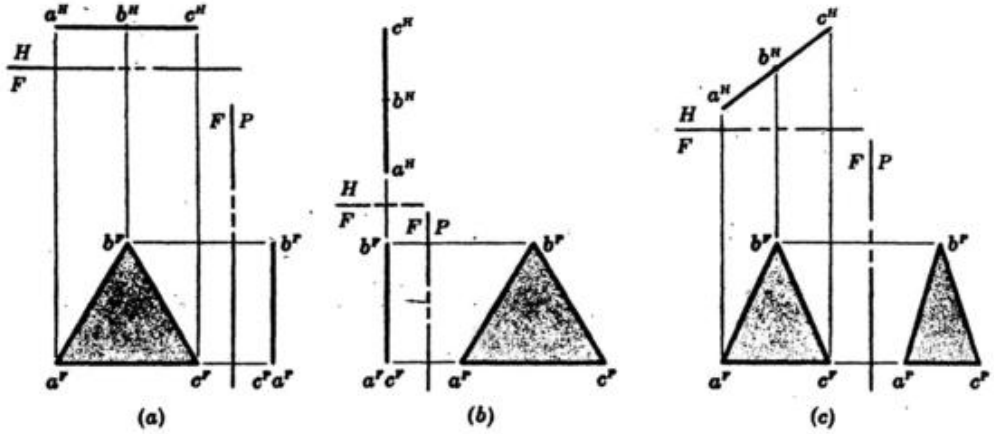


Fig. 1-15. Planos verticales

En la Fig. 1-16 tenemos algunas posiciones típicas de un plano inclinado. Un plano inclinado es un plano que no es ni vertical ni horizontal. Su tamaño verdadero no puede aparecer en ninguna de las tres vistas fundamentales —de planta, frontal o de perfil. Puede figurar como un filo en la vista frontal (*a*) o en la vista de perfil (*b*), pero no puede figurar como un filo en la vista de planta. En (*c*) tenemos un plano inclinado en su posición más

común que es inclinado con respecto a los tres planos principales de proyección. En este caso el plano no aparecerá como un filo en ninguna de las tres vistas principales. Este plano generalmente es llamado plano oblicuo.

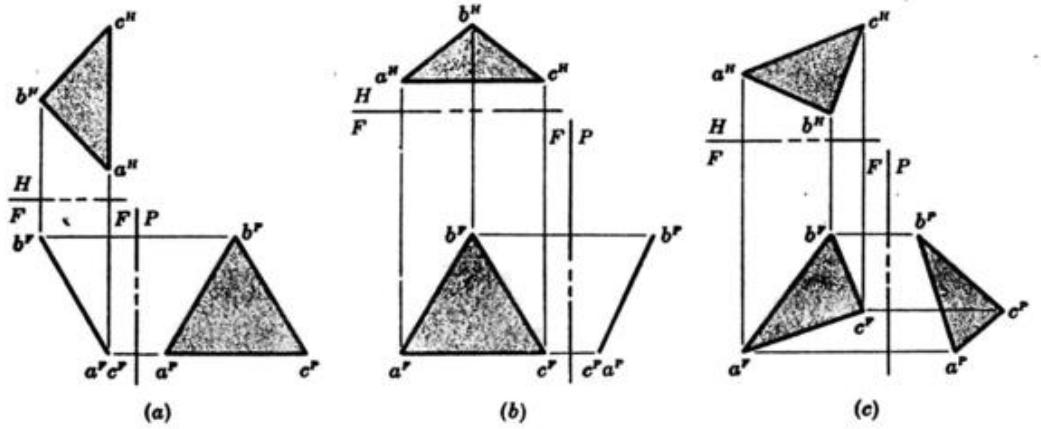


Fig. 1-16. Planos inclinados

1.7 PRESENTACION DE LOS PROBLEMAS

Los textos de geometría descriptiva utilizan diferentes métodos para expresar los datos de los problemas que generalmente acompañan a la exposición. Algunos dan los datos localizados sobre la hoja, listos para hacer un desarrollo más amplio o encontrar una solución. Ver la Fig. 1-17 (*a*). Otros expresan los datos en forma de enunciados, con los cuales el estudiante debe hacer los trazos necesarios para hallar la localización y las distancias entre los puntos dados. La escala a usarse es generalmente establecida de antemano por el instructor. En este sistema las relaciones entre puntos están dadas por direcciones y elevaciones. Así en la Fig. 1-17(*b*) la línea *AB* tiene un rumbo N 30°E y *B* está a una distancia horizontal de 100′ de *A* y 40′ por debajo de *A*. En (*c*) se dan las siguientes informaciones del plano *ABC*: *B* está 20′ al este, 30′ al norte y 10′ por encima de *A*; el punto *C* está 40′ al este, 10′ al sur y 15′ por debajo de *A*. En base a la escala dada por el instructor el estudiante debe localizar el punto *A* sobre el papel en una posición conveniente y luego medir las distancias de 20′ al este

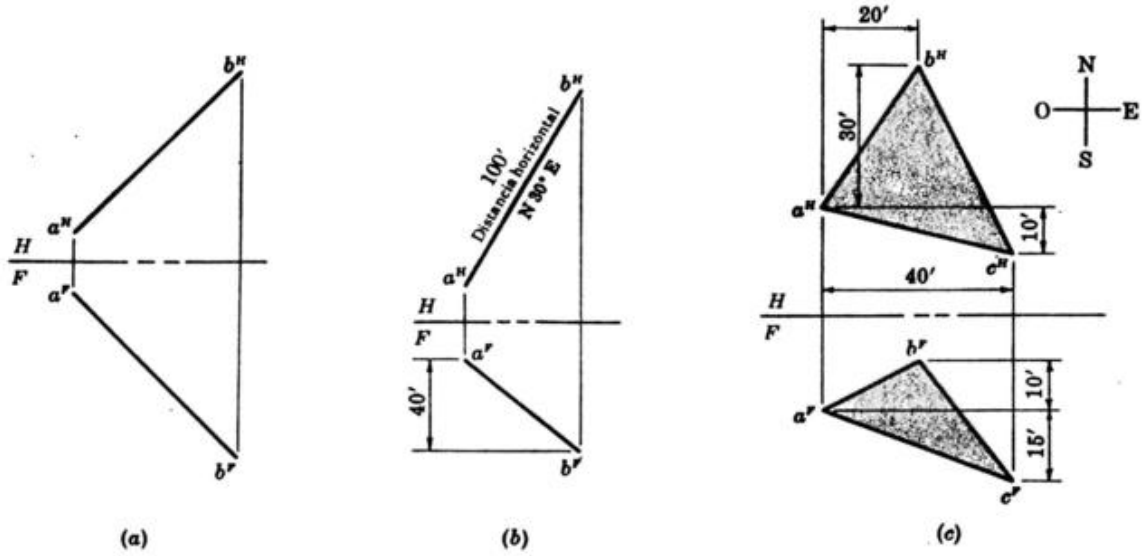


Fig. 1-17. Presentación de los problemas

y 30' al norte de A; de esta manera queda establecido el punto B en la vista de planta. El punto B en la vista frontal debe estar proyectado exactamente debajo de su localización en la vista de planta y con una elevación de 10' sobre el punto A, que también ha sido proyectado directamente de la vista de planta. El punto C se localiza de una forma similar.

Otro método muy usado en la presentación de los problemas consiste en utilizar ejes coordenados. Todos los puntos tienen tres coordenadas en el espacio, aun cuando en muchos problemas una o más de estas coordenadas puede ser omitida en los datos. Si una coordenada es desconocida y una parte del problema consiste en hallar la localización completa del punto, se introduce la letra X en los datos. Ejemplo: Punto $A(3,4\frac{1}{2}, X)$.

Las coordenadas están dadas generalmente en pulgadas-y el dibujo está hecho en una escala amplia, sin tener en cuenta el hecho de que la escala del problema también ha sido especificada. Para los problemas con coordenadas es muy conveniente utilizar un plano de $8\frac{1}{2}'' \times 11''$, dividido en cuartos de pulgada.

El origen o punto cero se supone localizado en la esquina izquierda más baja del dibujo. Ejemplo con ejes coordenados del plano ABC establecido por la línea AB y el punto C: $A(2, 3, 7)$, $B(4, 3\frac{1}{2}, 6)$, $C(5, 2, 7\frac{1}{2})$. Ver la Fig. 1-18. Para localizar el punto A, la primera ordenada 2

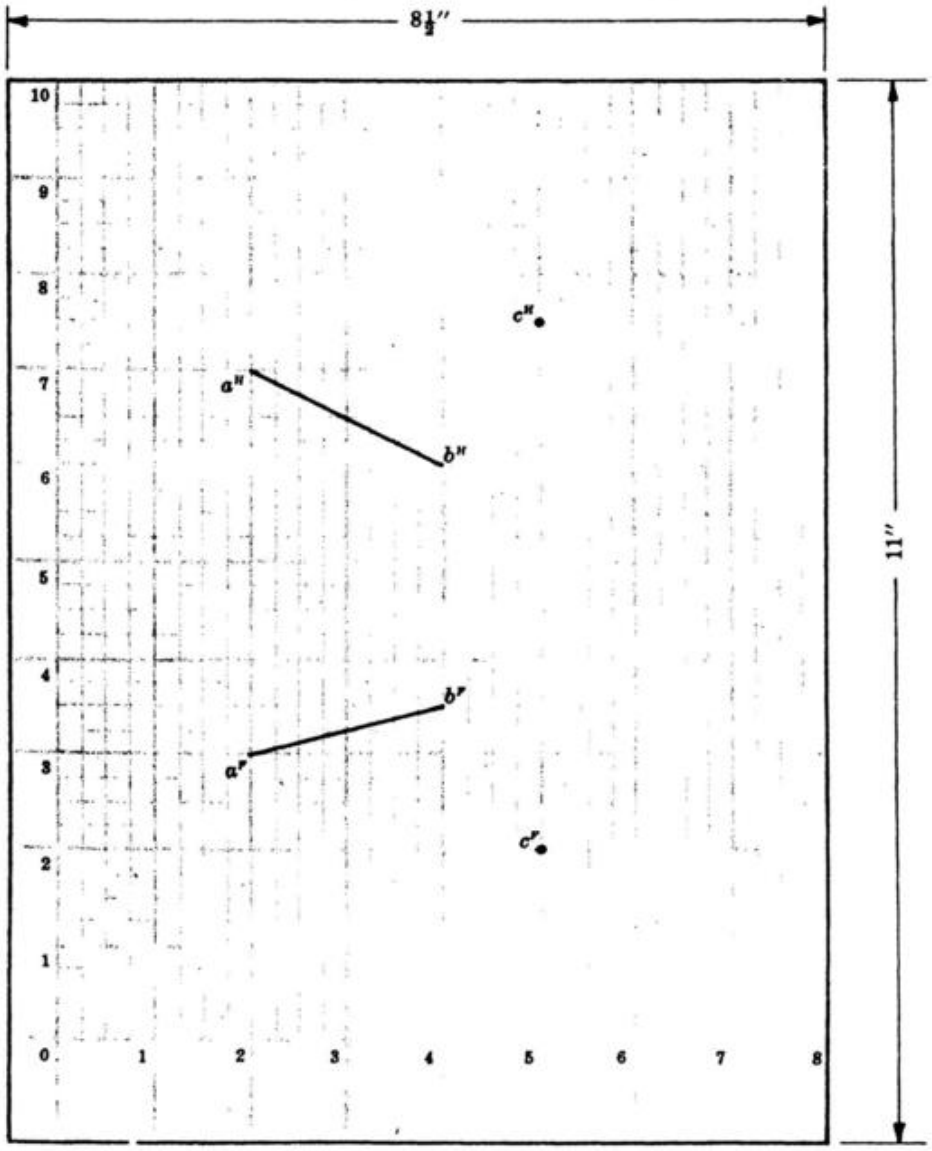


Fig. 1-18. Presentación de los problemas — ejes coordenados

nos dice que tanto en la vista de planta como en la vista frontal, *A* está localizado a 2″ de la línea de borde izquierda. La segunda ordenada 3 localiza la vista frontal de *A*, 3″ por encima de la línea base horizontal que pasa por el origen. La tercera ordenada 7 establece el punto *A* en la vista de planta 7″ sobre la línea base horizontal. Los puntos *B* y *C* pueden localizarse de una forma similar.

Dos buenas razones para que el estudiante designe cada punto tan pronto lo haya localizado son: El riesgo de cometer errores y el ahorro de tiempo. También es conveniente que el estudiante verifique la localización de los puntos con los datos. Un error muy común es la confusión de las direcciones este y oeste. Por supuesto, el norte se supone siempre en la parte superior de la hoja del dibujo.

Las respuestas a los problemas en este texto han sido obtenidas por soluciones gráficas y en la mayoría de los casos no han sido justificadas con cálculos matemáticos. En la corrección de los problemas de geometría descriptiva el instructor debe permitir cierta "tolerancia", de acuerdo a la escala utilizada. Las escalas utilizadas para los problemas resueltos en este texto son tales, que el estudiante las puede verificar directamente sobre los dibujos. En la práctica se pueden modificar las escalas hasta ajustar las dimensiones al papel de dibujo que se está usando, si es necesario.

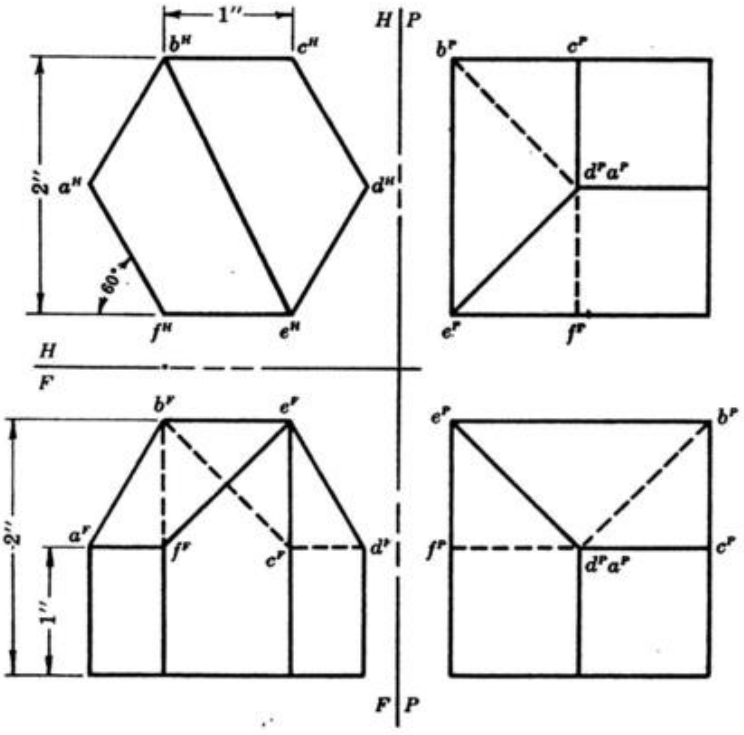
Algunos problemas suplementarios de este texto están basados en la escala de arquitecto mientras que otros exigen el uso de una escala de ingeniero. Se sugiere al estudiante adquirir ambos tipos de escala con el fin de asegurar un mayor grado de precisión, así como también familiarizarse con el uso de ambos tipos.

Problemas resueltos

1. **Dado:** La vista de planta y la vista de elevación frontal en la Fig. 1-19.

Problema: Dibuje la vista de perfil a partir de la vista de planta y luego a partir de la vista de elevación frontal.

Solución: Ver la Fig. 1-19.



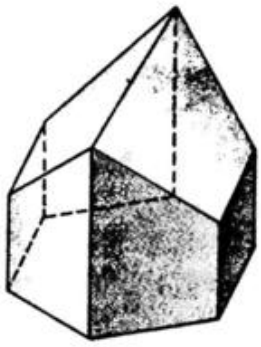
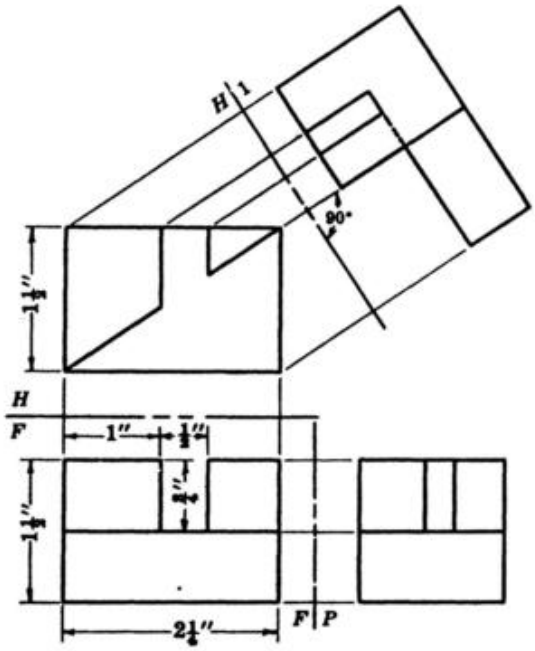


Fig. 1-19

2. Dado: La vista de planta y la vista de elevación frontal en la Fig. 1-20. La localización de *H*-1 y *F*-*P*.

Problema: Dibuje una vista de elevación auxiliar a partir de la vista de planta y una vista de perfil a partir de la vista de elevación frontal.

Solución: Ver Fig. 1-20.



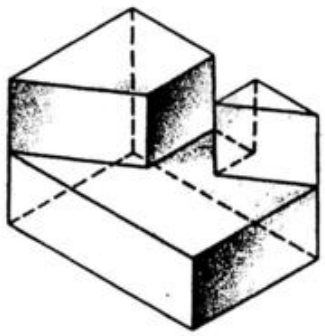
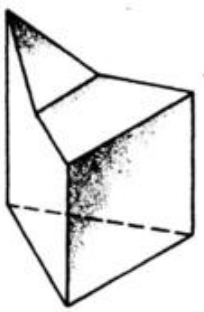


Fig. 1-20

3. Dado: La vista de planta y la vista de elevación frontal en la Fig. 1-21. La localización de *H*-1 y 1-2.

Problema: Dibuje las vistas de elevación pedidas.

Solución: Ver Fig. 1-21.



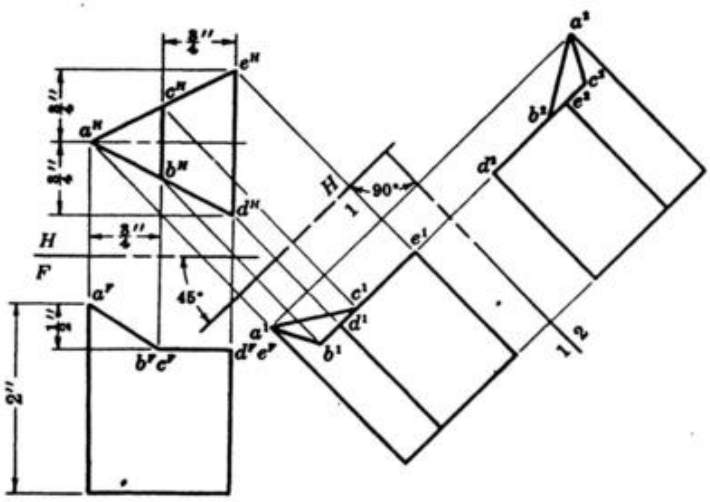
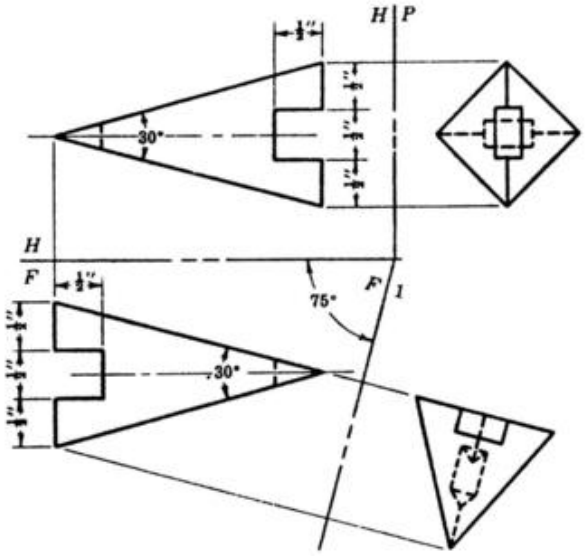


Fig. 1-21

4. **Dado:** La vista de planta y la vista de elevación frontal en la Fig. 1-22. La localización de *H-P* y *F*-1.

Problema: Dibuje una vista de perfil proyectada de la vista de planta y una vista inclinada proyectada de la vista frontal.

Solución: Ver Fig. 1-22.



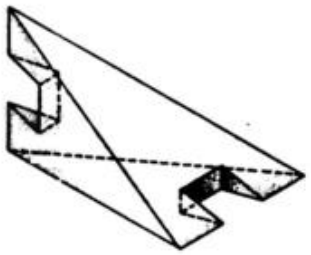
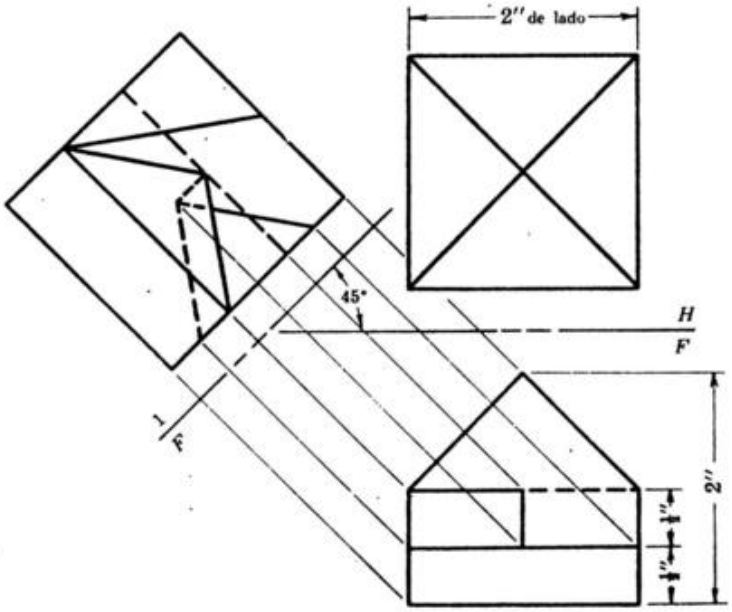


Fig. 1-22

5. **Dado:** La vista de planta y la vista de elevación frontal en la Fig. 1-23. La localización de *F*-1.

Problema: Dibuje una vista inclinada proyectada de la vista de elevación frontal.

Solución: Ver Fig. 1-23.



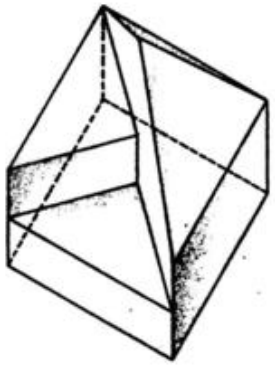
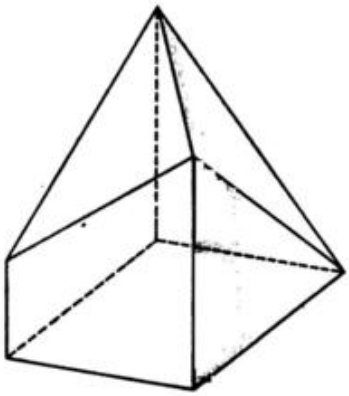


Fig. 1-23

6. Dado: La vista de planta y la vista de elevación frontal en la Fig. 1-24. La localización de *F*-1.

Problema: Dibuje una vista inclinada proyectada de la vista de elevación frontal.

Solución: Ver Fig. 1-24.



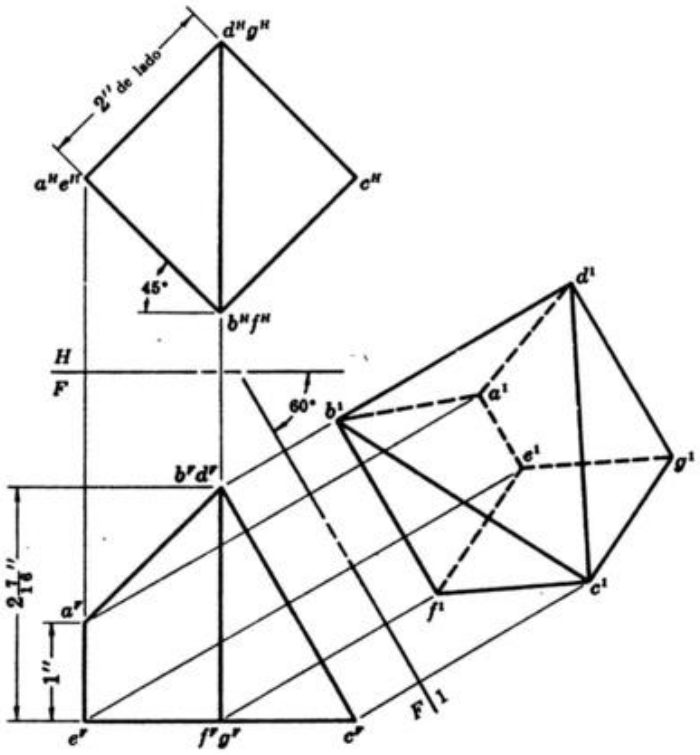
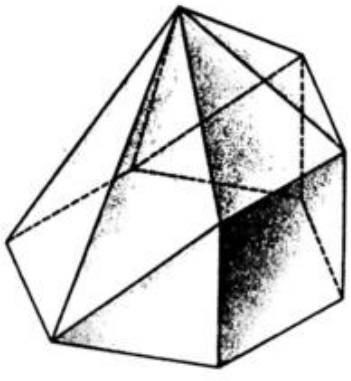


Fig. 1-24

7. Dado: La vista de planta y la vista de elevación frontal en la Fig. 1-25. La localización de *F*-1.

Problema: Dibuje una vista inclinada proyectada de la vista de elevación frontal.

Solución: Ver Fig. 1-25.



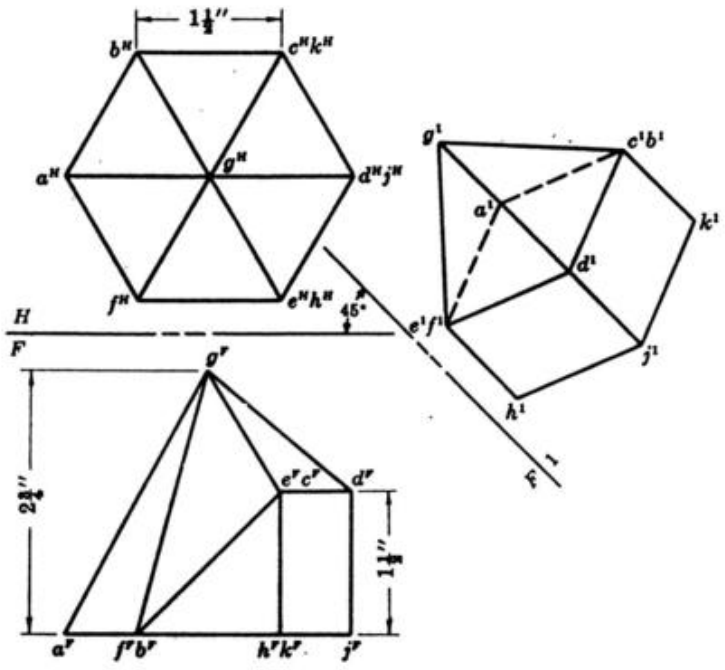


Fig. 1-25

8. Dado: La vista de planta y la vista de elevación frontal en la Fig. 1-26. La localización de *H-P*, *P*-1 y *F*-2.

Problema: Dibuje la vista de perfil y las vistas inclinadas pedidas.

Solución: Ver Fig. 1-26.

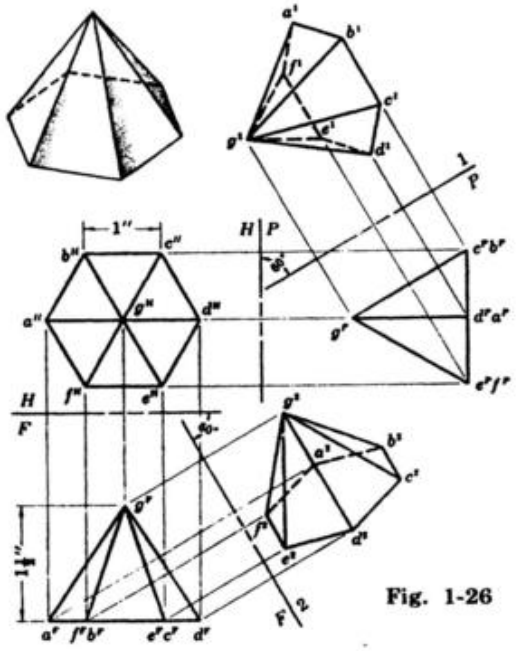


Fig. 1-26

9. Dado: La vista de planta y la vista de elevación frontal en la Fig. 1-27. La localización de *H*-1.

Problema: Dibuje una vista de elevación auxiliar, como se indica.

Solución: Ver Fig. 1-27.

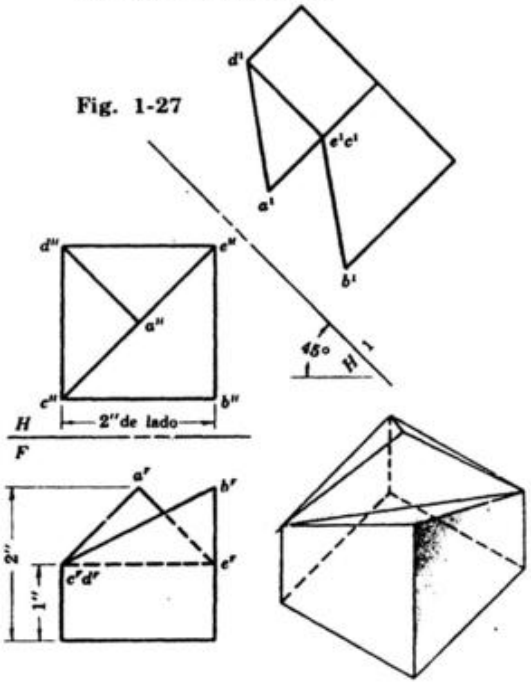


Fig. 1-27

10. Dado: La vista de planta y la vista de elevación frontal en la Fig. 1-28. La localización de *F-P*, *H*-1 y 1-2.

Problema: Dibuje la vista de perfil, la vista de elevación auxiliar y las vistas inclinadas pedidas.

Solución: Ver Fig. 1-28.

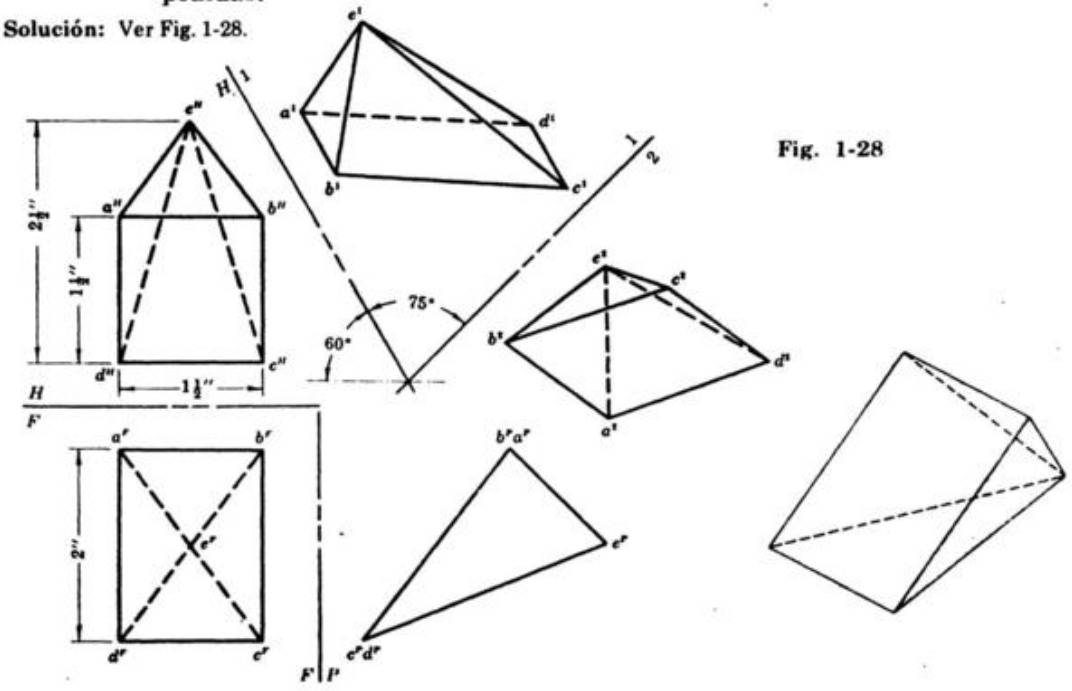


Fig. 1-28

Problemas propuestos

11. Dado: La vista frontal y una parte de la vista de planta de una pirámide truncada que tiene como base un exágono regular, como se muestra en la Fig. 1-29.
Problema: Complete la vista de planta y dibuje una vista inclinada que muestre las dimensiones verdaderas de la superficie cortada.

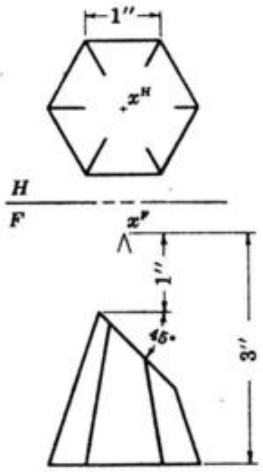


Fig. 1-29

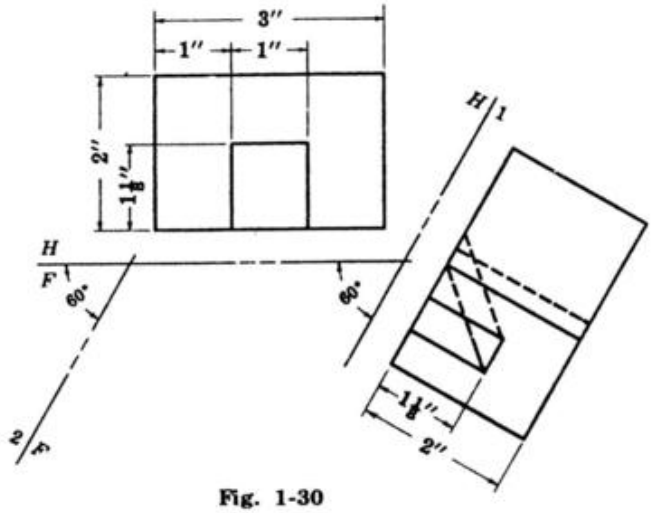


Fig. 1-30

12. Dado: La vista de planta y una vista de elevación auxiliar en la Fig. 1-30. La localización de *F*-2.
Problema: Dibuje una vista de elevación frontal y una vista inclinada como se indica.

13. Dado: La vista de planta y la vista de elevación frontal de un prisma exagonal regular en la Fig. 1-31. La localización de *H*-1 y 1-2.
Problema: Dibuje la vista de elevación auxiliar y la vista inclinada que se piden.

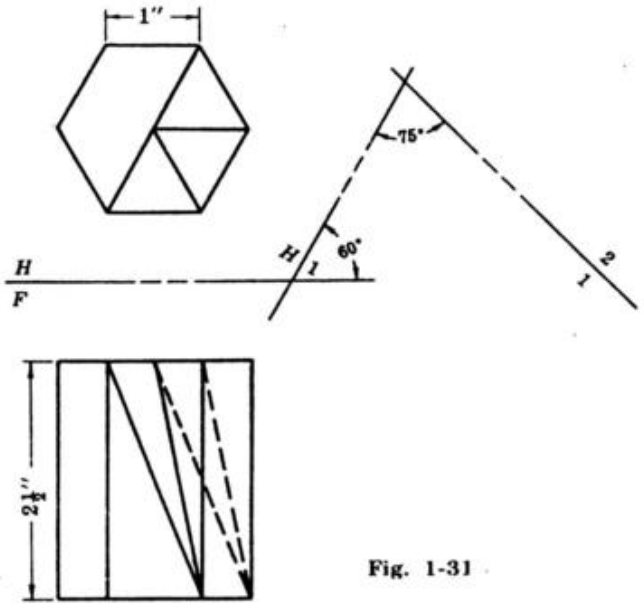


Fig. 1-31

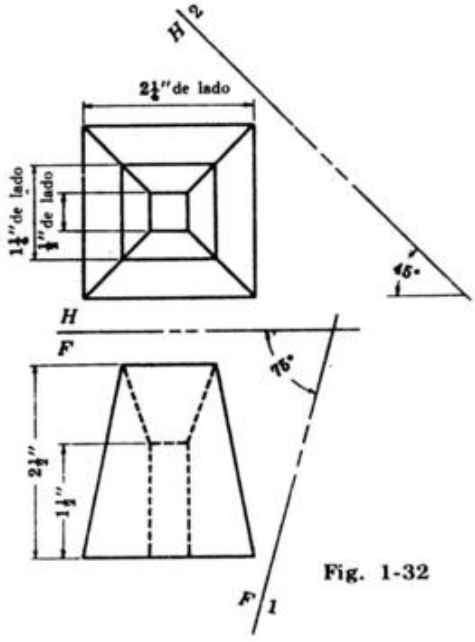


Fig. 1-32

14. Dado: La vista de planta y la vista de elevación frontal en la Fig. 1-32. La localización de *F*-1 y *H*-2.
Problema: Dibuje la vista inclinada y la vista de elevación auxiliar que se piden.

15. Dado: La vista de planta y la vista de elevación frontal en la Fig. 1-33. La localización de *F*-1 y *H*-2.
Problema: Dibuje la vista de elevación auxiliar y la vista inclinada que se piden.

16. Dado: La vista de elevación frontal y la vista de perfil en la Fig. 1-34. La localización de *F*-1 y *F*-2.
Problema: Dibuje las vistas inclinadas que se piden.

17. Dado: La vista de planta y la vista de elevación frontal en la Fig. 1-35. La localización de *H*-1 y *F*-*P*.
Problema: Dibuje la vista de perfil y la vista de elevación auxiliar que se piden.

18. Dado: La vista de planta y la vista de elevación frontal de una pirámide truncada que tiene como base un exágono regular, como se muestra en la Fig. 1-36. La localización de *F*-1 y 1-2.
Problema: Dibujar las vistas inclinadas que se piden.

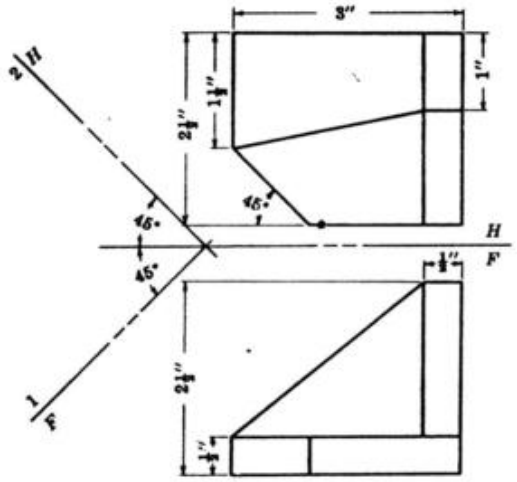


Fig. 1-33

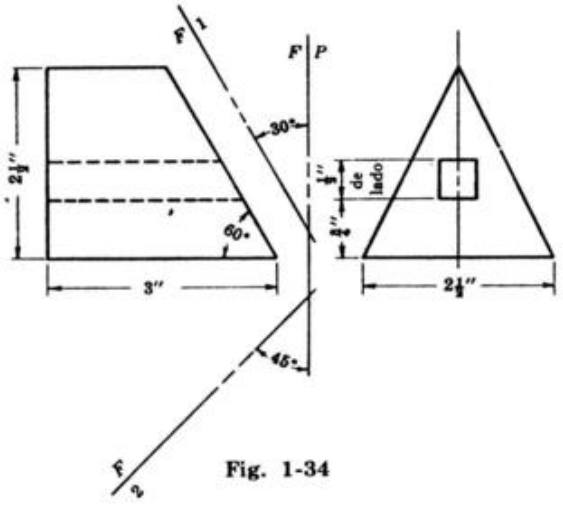


Fig. 1-34

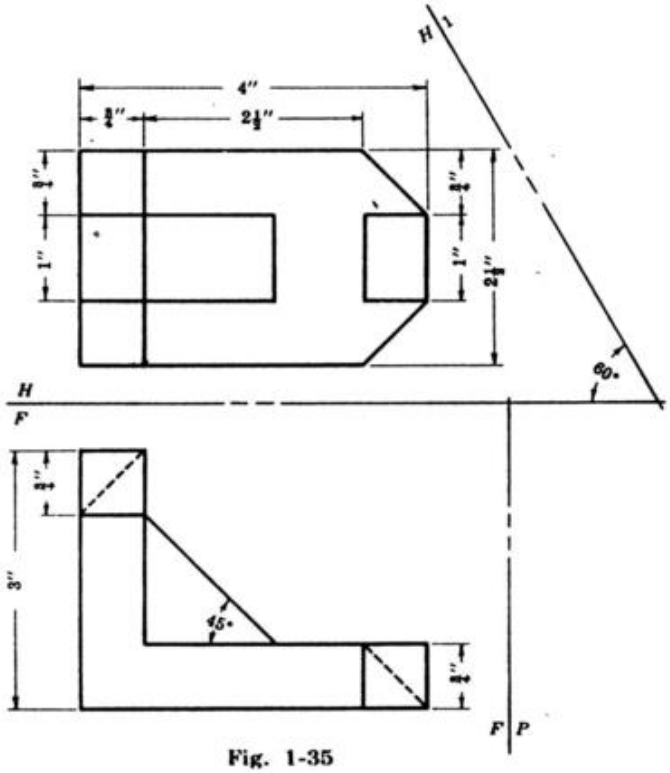


Fig. 1-35

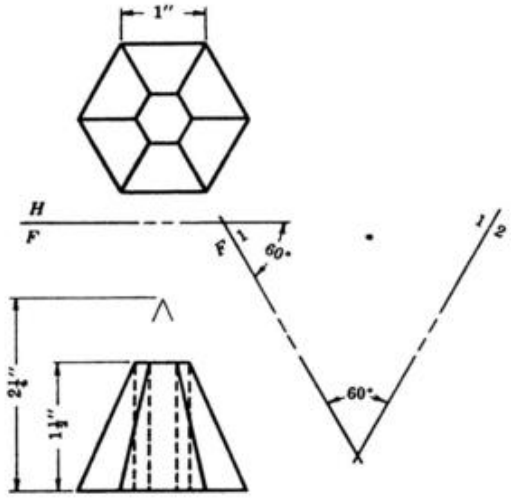


Fig. 1-36

19. Dado: La vista de planta y la vista de perfil en la Fig. 1-37. La vista de elevación frontal incompleta. La localización de *F*-1.
Problema: Complete la vista de elevación frontal y dibuje la vista inclinada 1.

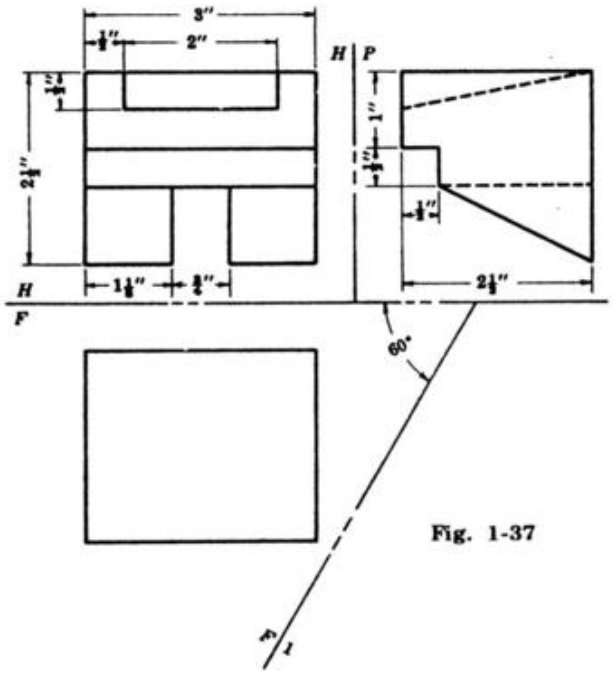


Fig. 1-37

20. Dado: La vista de planta y la vista de elevación frontal en la Fig. 1-38. La localización de *H*-1, 1-2 y *F*-3.
Problema: Dibuje las vistas de elevación y la vista inclinada que se piden.

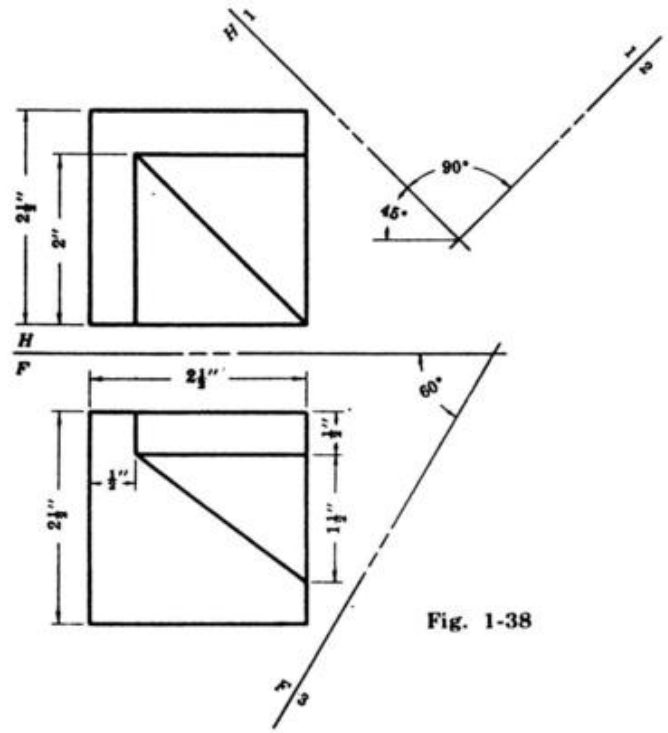


Fig. 1-38

Capítulo 2

Vistas fundamentales – Punto, línea y plano

La proyección de un punto o una línea de una vista a otra es de vital importancia para la resolución de problemas de geometría descriptiva. Si un punto en el espacio está localizado sobre una línea en una vista, debe aparecer sobre la línea en todas las vistas.

Si tenemos en el espacio una línea oblicua que contiene un punto X en una vista, como se muestra en la Fig. 2-1, la localización del punto en las otras dos vistas principales se establece por simple proyección de una vista a otra.

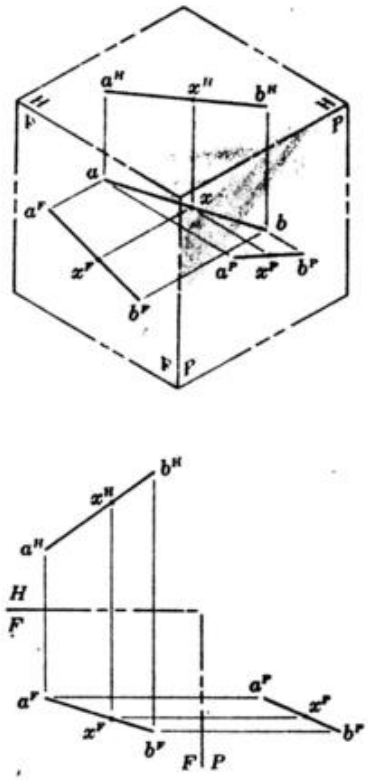
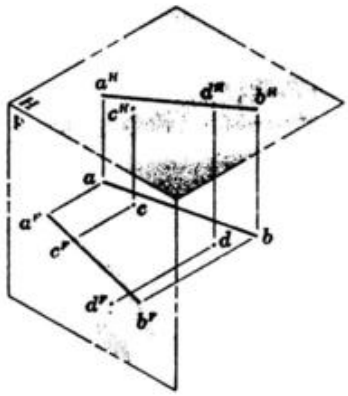


Fig. 2-1



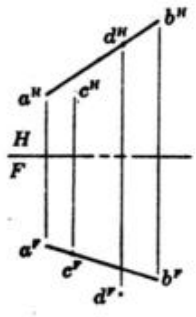


Fig. 2-2

En la Fig. 2-2 el punto C aparece sobre la línea AB en la vista frontal, pero observamos que en la vista de planta el punto C está localizado, en realidad, en frente de la línea. De la misma manera, el punto D aparece localizado sobre la línea AB en la vista de planta pero observamos nuevamente que la elevación del punto D es realmente más baja que la de cualquier punto perteneciente a la línea. Por tanto, un punto que aparece localizado sobre una línea en una vista puede no estar sobre la línea, ya que puede estar localizado en frente, detrás, arriba o debajo de ella.

2.1 PROYECTAR UN PUNTO SITUADO SOBRE UNA LINEA, DE UNA VISTA A OTRA, CUANDO LA LINEA ES PARALELA A UN PLANO PRINCIPAL

Análisis: Proyecte el punto haciendo un ángulo de 90° con la línea de pliegue situada entre las dos vistas.

Ejemplo 1: *Línea frontal* (Fig. 2-3). La línea *AB* está dada tanto en el plano de proyección horizontal como en el plano de proyección frontal. El punto *X* se localiza sobre la línea *AB* en la vista de planta. Para localizar su posición en el plano frontal simplemente proyecte, haciendo un ángulo de 90° con la línea de pliegue *H-F* y obtenga x^F. La línea de pliegue *F-P* se coloca perpendicular a la línea *H-F*. Los puntos *A*, *B* y *X* en la vista de perfil estarán a las mismas distancias del plano frontal que los puntos respectivos localizados en la vista de planta. La línea aparecerá paralela al plano frontal tanto en el plano de proyección horizontal como en el plano de proyección de perfil.

Ejemplo 2: *Línea de nivel* (Fig. 2-4). La línea *AB* está dada tanto en el plano de proyección horizontal como en el plano de proyección frontal. El punto *X* está localizado sobre la línea *AB* en la vista frontal. Para obtener su posición en la vista de planta, proyéctelo perpendicularmente a la línea de pliegue *H-F* para obtener x^H. Coloque la línea de pliegue *H-P* perpendicular a la línea *H-F* y proyecte los puntos *A*, *B* y *X* de la vista de planta a la vista de perfil. Las distancias de estos puntos al plano horizontal serán las mismas tanto en la vista frontal como en la vista de perfil. La línea aparecerá paralela al plano horizontal tanto en el plano de proyección frontal como en el plano de proyección de perfil.

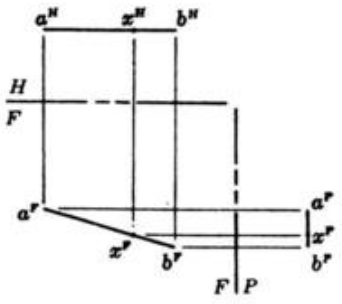


Fig. 2-3

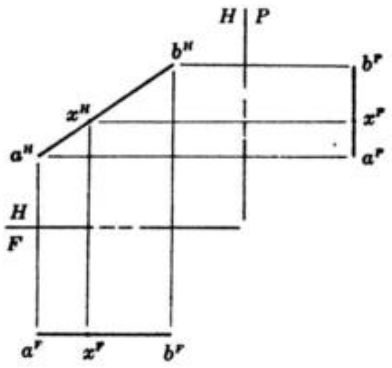


Fig. 2-4

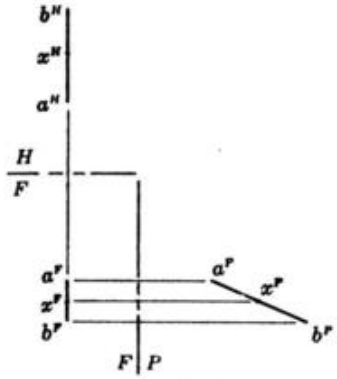


Fig. 2-5

Ejemplo 3: *Línea de perfil* (Fig. 2-5). La línea *AB* está dada en el plano de proyección horizontal y en el plano de proyección frontal. El punto *X* está localizado sobre la línea *AB* en la vista frontal. Es imposible proyectar el punto directamente a la vista de planta. Por tanto se debe dibujar una nueva vista y el punto *X* se proyectará sobre la línea *AB* en la nueva vista. Esta nueva vista puede ser una vista de perfil, una vista de elevación auxiliar o una vista inclinada. Una vez que el punto se ha localizado en la nueva vista, se puede proyectar a la vista de planta o a cualquier otra vista.

Nota: Un punto sobre una línea divide la línea en segmentos proporcionales, que están siempre en la misma relación en todas las vistas. Así, si el punto *X* se localiza equidistante entre *A* y *B* en la vista frontal, aparecerá equidistante entre *A* y *B* en todas las vistas de la línea, excepto, por supuesto, cuando la línea aparece como un punto.

2.2 LOCALIZAR UN PUNTO SOBRE UN PLANO

Análisis: Del infinito número de líneas que pueden pasar a través de un punto situado sobre un plano, escoja una cualquiera. Todas las vistas de este punto deben situarlo sobre la línea escogida.

Ejemplo: Los datos muestran que el plano *ABC* contiene el punto *X* en la vista de planta. Ver Fig. 2-6. Dibuje una línea *YZ* que pase por el punto *X* en la vista de planta. Localice la línea en la vista de elevación frontal por medio de una sencilla proyección ortogonal. Esté seguro de que los puntos *Y* y *Z* se localizan sobre las líneas *AC* y *BC* respectivamente.* Puesto que la línea *YZ* pasa por el punto *X* en la vista de planta, proyecte el punto *X* a la vista de elevación frontal y su localización deberá estar sobre la línea *YZ* en esta vista.

**Nota:* El mismo principio se aplicará para la proyección de una vista a otra de una línea cualquiera situada sobre un plano.

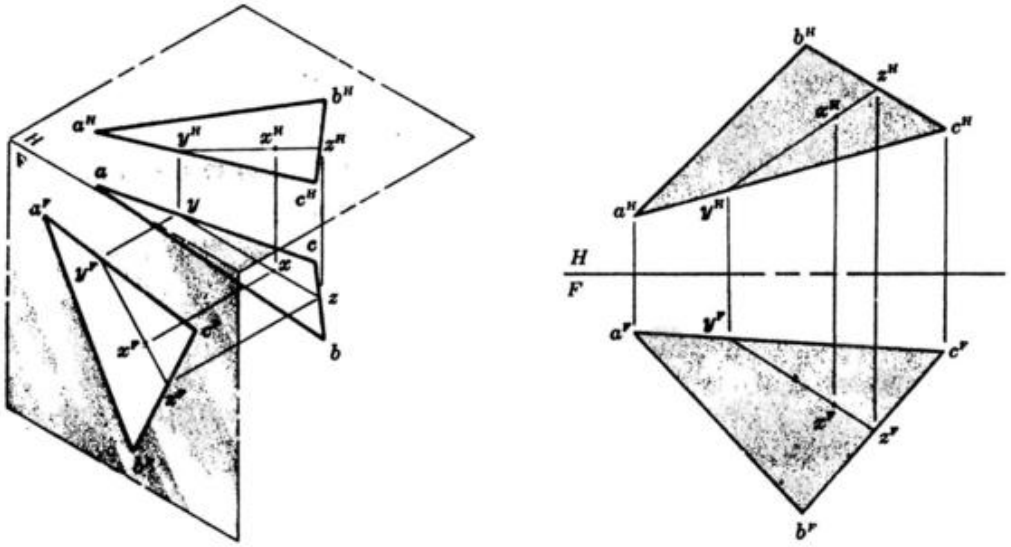


Fig. 2-6. Localizar un punto en un plano

2.3 VISTAS FUNDAMENTALES

Prácticamente todos los problemas que puede resolver gráficamente un ingeniero o un dibujante comprenden ciertas vistas básicas o fundamentales. De la comprensión de cuatro vistas básicas se obtiene la solución de los problemas más difíciles relativos a puntos, líneas y planos, en el espacio.

Un cuidadoso conocimiento de estas cuatro vistas fundamentales y del material explicativo formarán una sólida base para el desarrollo de las facultades del estudiante para analizar y resolver todos los problemas de geometría descriptiva.

Las cuatro vistas fundamentales son:

1. La longitud verdadera de una línea recta.
2. La línea recta apareciendo como un punto.
3. El plano figurando como un filo.
4. El plano apareciendo en su tamaño y formas verdaderas.

2.3.1-*A* LONGITUD VERDADERA DE UNA LINEA RECTA

Análisis: Cualquier línea en el espacio que ea paralela a un plano de imagen será proyectada sobre este plano en su verdadera longitud. De la misma manera, si una línea es paralela a una línea de pliegue (línea de referencia) en una vista, aparecerá en su longitud verdadera en la vista relacionada, al otro lado de la línea de pliegue.

Ejemplos: En la Fig. 2-7 tenemos varios ejemplos de líneas que aparecen en su verdadera longitud en las tres vistas principales. En (*a*) la línea es vertical y por tanto aparece en su verdadera longitud en cualquier vista de elevación. En (*b*) y en (*c*) mostramos dos líneas de nivel que aparecen en su verdadera longitud en la vista de planta. En *d*) se muestra una línea frontal que hace ver su longitud verdadera en la vista frontal. Y finalmente en (*e*) se ilustra una línea de perfil que muestra su longitud verdadera en la vista de perfil.

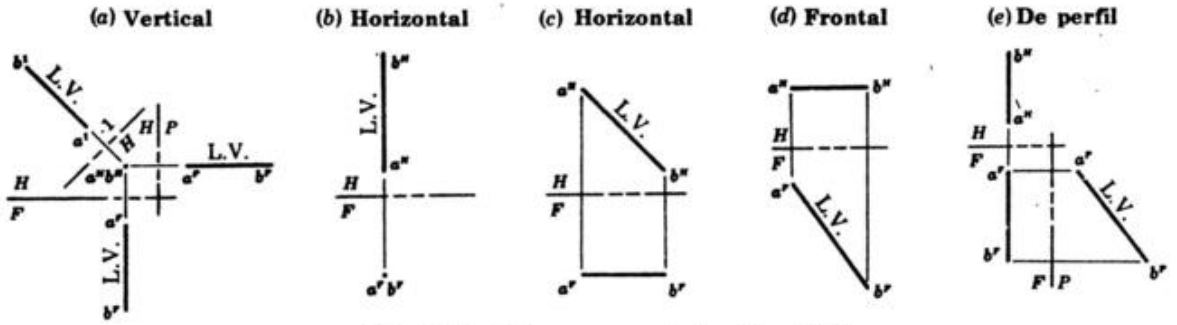


Fig. 2-7. Líneas en verdadera longitud

En el caso de una línea oblicua que no aparece en su verdadera longitud en ninguna de las tres vistas principales, se dibuja una nueva vista colocando un plano de imagen paralelo a la línea, en cualquiera de las vistas dadas. En la Fig. 2-8, por ejemplo, se da la línea *AB* tanto en la vista de planta como en la vista de elevación frontal. Observando resulta obvio que la línea no es paralela ni perpendicular a ninguno de los tres planos principales; por tanto es una línea oblicua.

Debido a que una línea debe ser paralela a un plano de imagen para ser mostrada en su longitud verdadera, se localiza un nuevo plano de imagen, paralelo a la línea, en la vista de planta. La intersección de este plano de imagen de elevación auxiliar con el plano de imagen horizontal se designa como línea de pliegue *H*-1. Esta nueva vista, como es una vista de elevación proyectada directamente de la vista de planta, tendrá las mismas distancias verticales entre sus puntos que la vista frontal. En otras palabras, los puntos *A* y *B* en esta vista de elevación auxiliar tendrán las mismas distancias a la línea de pliegue *H*-1 que los puntos correspondientes en la vista frontal de elevación a la línea de pliegue *H*-*F*.

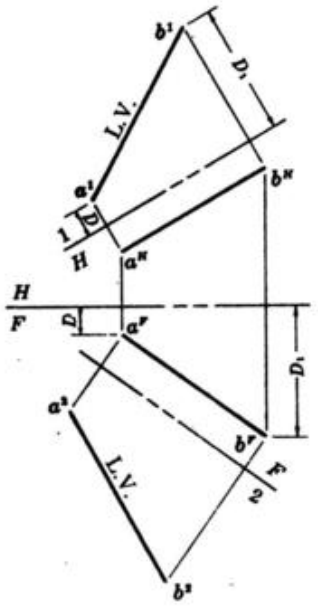


Fig. 2-8. Longitud verdadera de una línea oblicua

Otro medio para determinar la longitud verdadera de la línea es el de proyectar una vista inclinada directamente de la vista de elevación frontal. Pasando un plano de imagen inclinado paralelo a la línea en la vista frontal y proyectando perpendicularmente a ésta, obtenemos la longitud verdadera de la línea en la vista 2.

La línea de pliegue *H*-1 puede colocarse a cualquier lado de la línea *AB* y paralela a ella en la vista de planta sin que se afecte la longitud verdadera de la línea. Además, la línea de pliegue *F*-2 puede colocarse paralela y a cualquier distancia de la línea *AB* en la vista frontal. La localización de la línea de pliegue se determina en base al espacio disponible y la claridad del dibujo. Hasta donde sea posible el estudiante debe evitar "superponer" vistas.

El estudiante debe acostumbrarse a verificar las soluciones gráficas encontrando la longitud verdadera de las líneas por medio de cálculos matemáticos. El método gráfico para determinar la longitud verdadera de una línea es suficientemente exacto en la mayoría de los casos. Sin embargo, si los datos son suficientes, la solución matemática es más exacta y fácil de calcular.

En la Fig. 2-9(*a*) hemos mostrado una línea oblicua *AB* que representa la diagonal de una caja rectangular imaginaria. Si la longitud de la caja es 2", su espesor $\frac{3}{4}$" y su altura 1", la longitud verdadera de la línea será igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de *L*, *D* y *H*.

Longitud verdadera de $AB = \sqrt{L^2 + D^2 + H^2} = \sqrt{2^2 + (\frac{3}{4})^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 0{,}5625 + 1}$

$= \sqrt{5{,}5625} = 2{,}3585$ pulg.

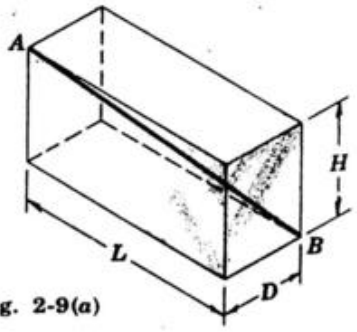


Fig. 2-9(*a*)

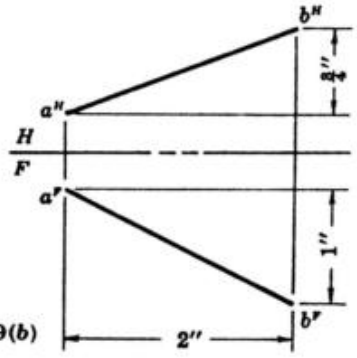


Fig. 2-9(*b*)

En la Fig. 2-9(*b*) hemos mostrado la vista de planta y la vista de elevación frontal de esta línea oblicua.

2.3.1-*B* PENDIENTE VERDADERA DE UNA LINEA RECTA

Análisis: La pendiente verdadera de una línea es la tangente del ángulo que la línea forma con un plano horizontal. El ángulo entre una línea en su verdadera longitud y un plano horizontal se llama ángulo de pendiente. El ángulo de pendiente de cualquier línea puede verse únicamente en la vista de elevación que muestre la línea en su verdadera longitud.

Nota: Aun cuando una vista inclinada puede mostrar la longitud verdadera de una línea, no puede mostrar la pendiente verdadera, porque una vista inclinada no puede mostrar un plano horizontal como un filo.

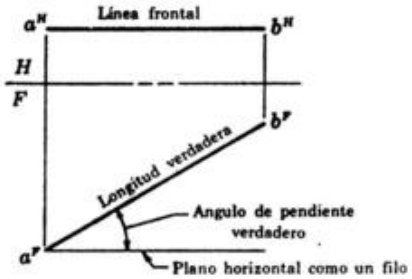


Fig. 2-10

Ejemplos: En la Fig. 2-10 hemos mostrado el ángulo de pendiente verdadero de una línea frontal. La Fig. 2-11 muestra una línea oblicua *AB* que debe ser representada en su verdadera longitud en una vista de elevación, antes de que se pueda determinar su pendiente. Como se indicó anteriormente, la vista inclinada 2 puede representar la longitud verdadera de una línea pero no puede mostrar su pendiente.

Generalmente el ángulo de pendiente se expresa en grados. Sin embargo, en ingeniería civil la pendiente se expresa ya sea como un porcentaje de declive (Fig. 2-12) o como una inclinación (Fig. 2-13).

El porcentaje de declive es dado por la expresión

$$\% \text{ de declive} = \frac{\text{subida vertical}}{\text{recorrido horizontal}} \times 100$$

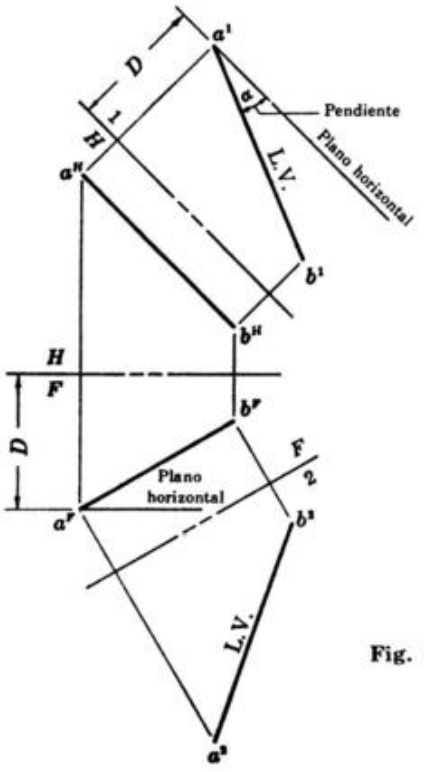


Fig. 2-11

Quizás el método más conveniente para medir el recorrido horizontal es utilizar una escala de ingeniero, puesto que 10 divisiones principales de cada una de sus diferentes escalas contienen 100 subdivisiones.

La Fig. 2-14 muestra el método de indicar el % de declive de una carretera.

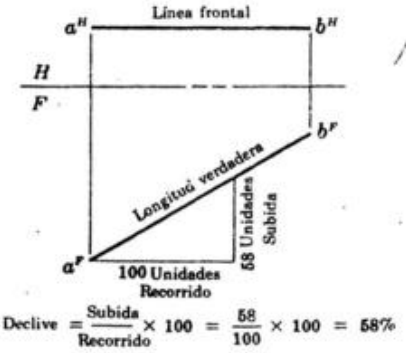


Fig. 2-12. Porcentaje de declive de una línea frontal

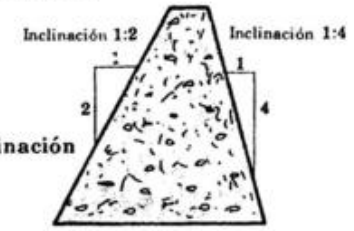


Fig. 2-13. Inclinación

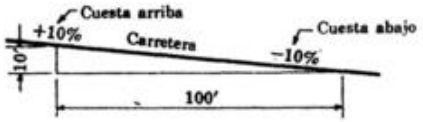


Fig. 2-14. Carretera que tiene 10% de declive

Para encontrar el porcentaje de declive de cualquier línea oblicua, la línea debe ser mostrada con anterioridad en su verdadera longitud en una vista de elevación. En la Fig. 2-15 el cálculo del declive se hace dibujando una línea paralela a la línea de pliegue H-1 y midiendo 100 unidades a lo largo de esta línea. La subida se mide perpendicular a la línea H-1, estableciendo de este modo un porcentaje de declive del 58%.

La Fig. 2-16 ilustra el método para obtener el declive de una línea oblicua a partir de la vista de planta y de la vista frontal únicamente. El recorrido se mide en la vista de planta de la línea, tomando 100 unidades y estableciendo el punto x^H. La subida aparecerá en la vista frontal como la diferencia de elevación entre a^F y x^F.

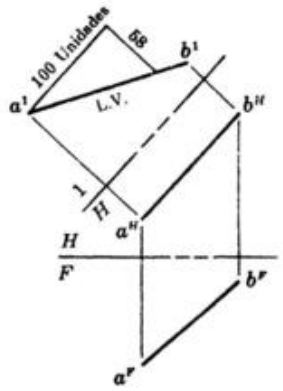


Fig. 2-15. Declive de una línea oblicua

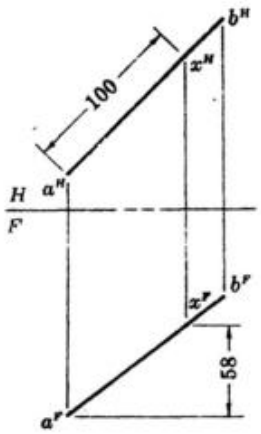


Fig. 2-16. Medida del declive con sólo la vista de planta y la vista frontal

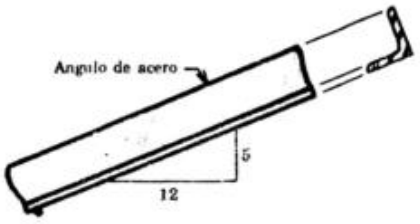


Fig. 2-17. Pendiente de un elemento de construcción

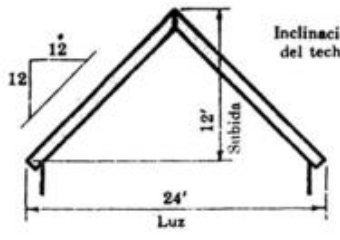


Fig. 2-18. Inclinación de un techo

En ingeniería de estructuras la pendiente de una viga u otro miembro estructural se expresa como se muestra en la Fig. 2-17.

La inclinación de un techo en dibujo arquitectónico puede determinarse como se muestra en la Fig. 2-18.

2.3.1-*C* DIBUJAR LAS VISTAS DE UNA LINEA, DADOS SU LONGITUD VERDADERA, SU PENDIENTE Y SU RUMBO

Análisis: Debe recordarse que el rumbo se puede mostrar únicamente en la vista de planta y que la dirección norte siempre se supone hacia la parte superior de la hoja de dibujo. Puesto que el rumbo de la línea es dado, la línea puede dibujarse en la vista de planta con una longitud indefinida, sin tener en cuenta la pendiente ni la longitud verdadera. Una vista de elevación auxiliar que tenga las líneas de mira perpendiculares al rumbo, mostrará la longitud verdadera y la pendiente de la línea. Una vez que se ha establecido la longitud verdadera en la vista de elevación auxiliar, la línea se puede proyectar a la vista de planta. Ahora se puede proyectar la vista frontal a partir de la vista de planta, tomando las distancias de la vista de elevación auxiliar.

Ejemplo: La línea *AB* tiene un rumbo N 45° E, su longitud es 420' y tiene un declive descendente de 30% de *A* a *B*. Construya la vista de planta y la vista de elevación frontal de la línea.

La Fig. 2-19 muestra los cuatro pasos que comprende la resolución del problema.

Paso 1: Establezca el punto *A* tanto en la vista de planta como en la vista frontal. Por el punto *A* trace una línea con rumbo N 45° E, en la vista de planta. Esta línea tiene una longitud indefinida. Construya una línea de pliegue *H*-1 paralela a la línea de rumbo.

Paso 2: Localice el punto *A* en la vista de elevación auxiliar colocándolo a la misma distancia de la línea de pliegue que en la vista frontal. Por el punto A_1 en la vista 1, trace una línea clara, paralela a *H*-1 y mida 100 unidades, usando una escala adecuada. Mida una distancia perpendicular de 30 unidades para localizar un punto sobre la línea que tiene un declive descendente del 30%; esta línea también tiene longitud indefinida. (Si en cambio del porcentaje de declive es dado el ángulo de pendiente, se debe utilizar un transportador para trazar el ángulo.)

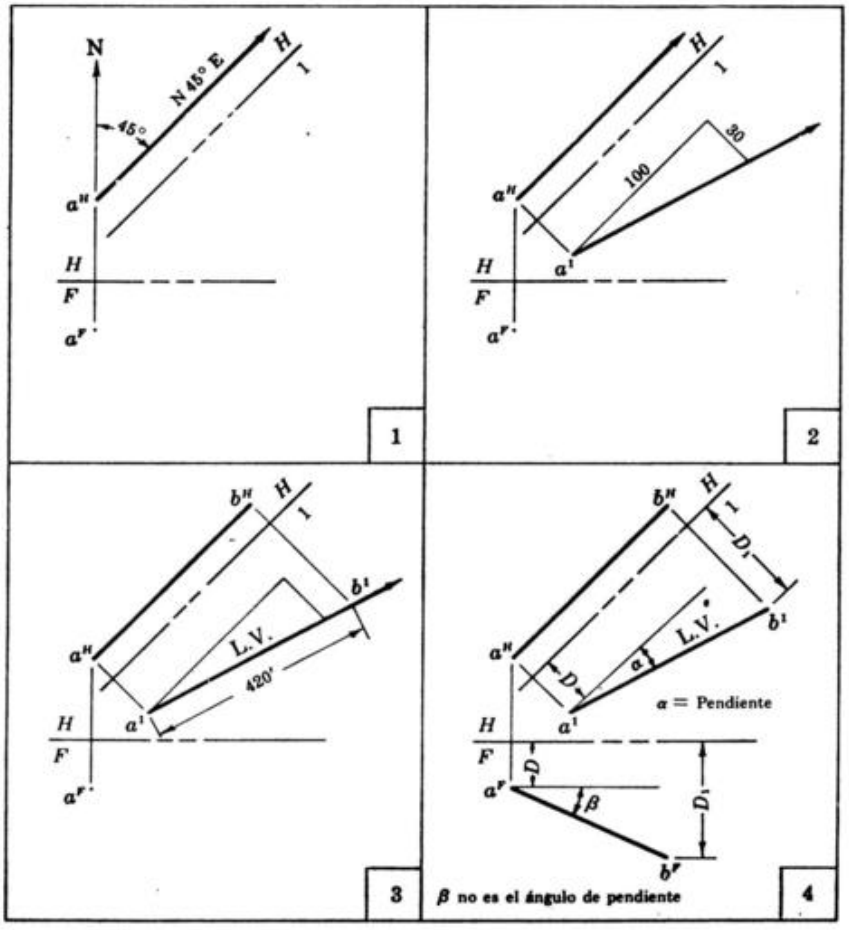


Fig. 2-19. Localización de una línea, dado su rumbo, declive y longitud

Paso 3: A lo largo de la línea con declive descendente del 30%, mida 420' a partir de *A* para localizar el punto *B*. Esta vista nos muestra ahora la longitud verdadera y el declive de la línea *AB*. Proyecte el punto *B* hasta intersectar la línea de rumbo, en la vista de planta.

Paso 4: Para localizar el punto *B* en la vista frontal, proyecte a partir de la vista de planta a la vista frontal y tome para el punto *B* las mismas distancias en la vista frontal y en la vista de elevación auxiliar 1. Los puntos semejantes en todas las vistas de elevación tendrán la misma distancia al plano de imagen horizontal.

Nota: Un error común cometido por muchos estudiantes es el de trazar el ángulo de pendiente o el declive en la vista frontal. Esto puede hacerse únicamente cuando el rumbo de la línea está dirigido hacia el este o hacia el oeste. Recuerde que para ver la pendiente o el declive de una línea, ésta debe aparecer en su longitud verdadera en una vista de elevación.

2.3.2 LINEA RECTA QUE FIGURA COMO UN PUNTO

Análisis: Una línea aparecerá como un punto en cualquier vista en que la línea de mira sea paralela a la línea situada en el espacio. La vista de punta de la línea representa todos los puntos de la línea. La línea debe aparecer en su verdadera longitud en la vista adyacente a la que la muestra como un punto. Generalmente la línea se representa en su verdadera longitud antes de proyectarse como un punto, pero ocasionalmente la vista de punta de la línea se establece primero y luego se establece la de longitud verdadera y otras proyecciones relativas.

Ejemplo: En la Fig. 2-20(*a*) una línea vertical se proyecta como un punto en la vista de planta; en (*b*) una línea de nivel se proyecta como un punto en la vista de elevación frontal; en (*c*) la línea *AB* es una línea de nivel que aparece como un punto en la vista de perfil.

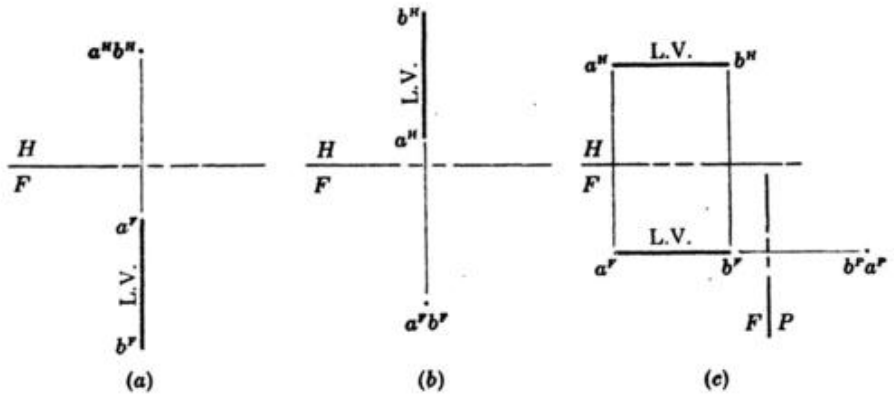


Fig. 2-20. Vistas que muestran una línea como un punto

La Fig. 2-21 muestra una línea oblicua que necesita cuatro vistas para presentarse como un punto. El primer paso en la determinación de la vista de punta de la línea es establecer su longitud verdadera. Luego se coloca la línea de pliegue perpendicular a la longitud verdadera de la línea. La proyección resultante de la línea será un punto.

La vista de la longitud verdadera puede ser una vista de elevación auxiliar proyectada a partir de la vista de planta o una vista inclinada proyectada a partir de la vista frontal. La ventaja de mostrar la longitud verdadera de una línea en una vista de elevación auxiliar es que se puede mostrar la pendiente de la línea en la misma vista, si fuera necesario. Como se mencionó anteriormente, la vista inclinada 3 no puede mostrar la pendiente de la línea porque un plano horizontal no aparece como un filo en esta vista y la pendiente se debe medir sobre una línea de base horizontal.

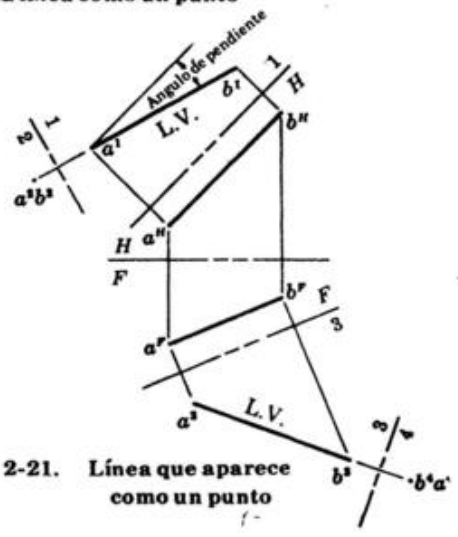


Fig. 2-21. Línea que aparece como un punto

2.3.3-*A* PLANO QUE APARECE COMO UN FILO

Definición: Un plano es una superficie tal, que una línea recta que una dos puntos cualesquiera situados sobre ésta, estará situada íntegramente sobre la superficie. Por tanto dos líneas cualesquiera situadas en un plano serán paralelas o se intersectarán. Para el propósito de la resolución de los problemas se puede considerar que un plano tiene una extensión indefinida.

Los planos que no son perpendiculares a ninguno de los tres planos principales de proyección se llaman planos oblicuos.

En la práctica general de ingeniería hay cuatro medios para representar un plano en un dibujo de varias vistas. Los problemas de este texto se pueden resolver utilizando cualquiera de estas representaciones de planos. En la Fig. 2-22 se muestran las cuatro representaciones de planos así: (*a*) Dos líneas que se intersectan*, (*b*) dos líneas paralelas, (*c*) tres puntos que no están en línea recta, (*d*) un punto y una línea.

* *Nota:* Para representar un plano por medio de la intersección de dos líneas, el punto de intersección debe proyectarse como un punto común, entre las vistas relacionadas.

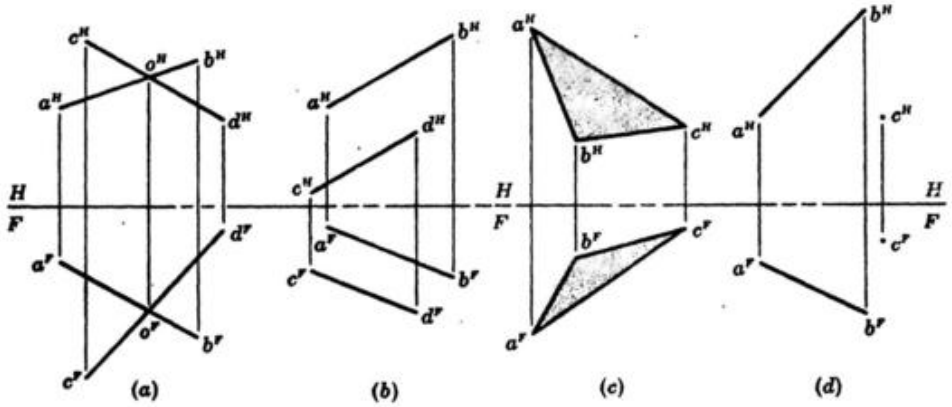


Fig. 2-22. Diferentes representaciones de una superficie plana

Análisis: (1) La vista de filo de un plano nunca se debe visualizar como una línea sino más bien como un plano en el cual los puntos están colocados a diferentes distancias del observador. (2) El método para mostrar un plano oblicuo como un filo consiste en construir una vista auxiliar con líneas de mira paralelas a una línea horizontal, una línea frontal o una línea de perfil situada sobre el plano. (3) La línea situada sobre el plano debe aparecer anteriormente en su longitud verdadera. (4) Un plano aparecerá como un filo o como una línea recta en una vista que muestre cualquier línea situada en el plano como un punto.

Ejemplo: Para obtener la vista de filo de un plano *ABC* en la Fig. 2-23, dibuje una línea de nivel *AD* en la vista frontal. Proyecte a la vista de planta, en la cual la línea de nivel aparece ahora en su longitud verdadera. Localice la línea de pliegue *H*-1 perpendicular a la línea de longitud verdadera. Proyecte los puntos de la vista de planta a la vista de elevación auxiliar. La línea de longitud verdadera en la vista de planta aparece ahora como un punto. Proyecte también los puntos *B* y *C* en la vista auxiliar. La línea recta que une estos dos puntos (y la vista de punta de la línea *AD*) determina la vista de filo del plano *ABC*.

Si en la vista frontal se dibujara un infinito número de líneas de nivel y se mostraran estas líneas en su longitud verdadera en la vista de planta, todas se proyectarían como puntos en la vista de elevación auxiliar. Así que, en realidad la vista de filo de un plano

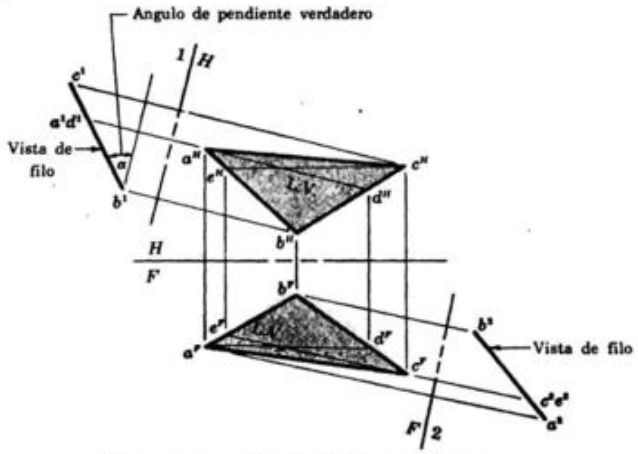


Fig. 2-23. Vista de filo de un plano

es un infinito número de puntos que representa un infinito número de líneas en longitud verdadera.

También se puede mostrar una vista de filo de un plano en una vista inclinada, dibujando una línea frontal *CE*, en la vista de planta, mostrándola en su longitud verdadera en la vista frontal y finalmente como un punto en la vista inclinada proyectada a partir de la vista frontal.

2.3.3-*B* PENDIENTE VERDADERA DE UN PLANO

Análisis: El ángulo de pendiente de un plano cualquiera es el ángulo que el plano forma con un plano de referencia horizontal. Este ángulo de pendiente se puede medir en grados o en porcentaje de declive, exactamente como se mide la pendiente de una línea.

Ejemplo: En la Fig. 2-23 se puede ver el ángulo de pendiente verdadero únicamente en la vista de elevación que muestra el plano como un filo. El ángulo formado entre esta vista de filo y un plano de referencia horizontal es la pendiente verdadera.

Nota: Aún cuando una vista inclinada puede mostrar la vista de filo de un plano, no puede mostrar su pendiente verdadera porque no puede mostrar un plano de referencia horizontal como un filo.

En geología e ingeniería de minas se utiliza el término "buzamiento" para expresar el ángulo de pendiente de un plano. (Ver Art. 9.1)

2.3.4 PLANO QUE APARECE EN SU FORMA Y TAMAÑO VERDADEROS

Análisis: Una superficie plana aparecerá en su forma y tamaño verdaderos cuando las líneas de mira sean perpendiculares al plano. Cualquier superficie plana paralela a un plano de imagen se proyectará sobre éste en su forma y tamaño verdaderos. Así, un plano de nivel aparecerá en su tamaño verdadero en la vista de planta. Para determinar las dimensiones verdaderas de un plano oblicuo, antes que todo, el plano debe aparecer como un filo. Cualquier línea en su longitud verdadera situada sobre un plano que aparezca como un punto en una vista, también mostrará el plano como un filo en esta vista. Una nueva vista con líneas de mira perpendiculares a la vista de filo, mostrará el plano en su forma y tamaño verdaderos.

Ejemplo: Para obtener el tamaño verdadero del plano *ABC* que se muestra en la Fig. 2-24, el primer paso debe ser mostrar una línea en su longitud verdadera, situada sobre el plano. Esto puede hacerse trazando una línea frontal *CE* en la vista de planta o trazando una línea de nivel *CD* en la vista frontal. La vista de elevación auxiliar 1 mostrará la línea de nivel como un punto y de esta manera el plano aparecerá como un filo. La vista inclinada 2 muestra el tamaño verdadero del plano.

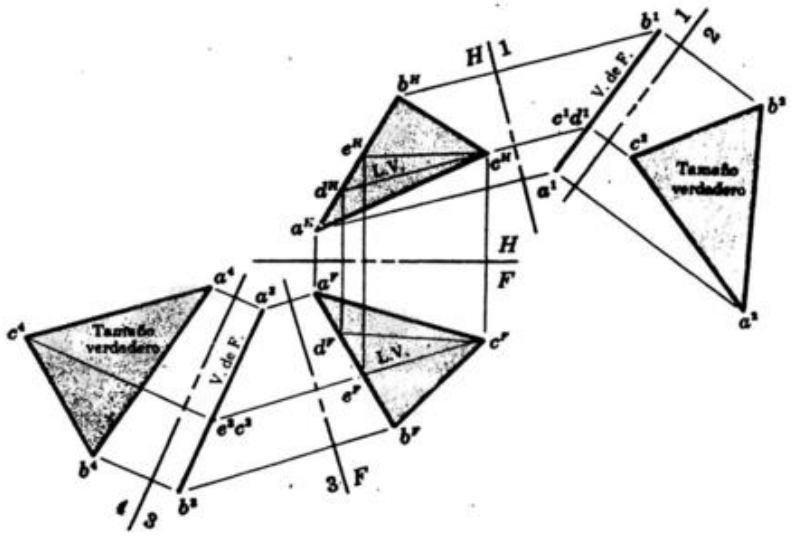


Fig. 2-24. Tamaño verdadero de un plano oblicuo

Si se utiliza una línea frontal, su longitud verdadera aparecerá en la vista frontal y la vista inclinada 3 mostrará la línea frontal como un punto y el plano como un filo. La vista inclinada 4 muestra el plano en su forma y tamaño verdaderos. Por supuesto, la forma y tamaño del plano en 4 son los mismos del plano en 2. Esto constituye una excelente verificación de la exactitud del trabajo.

Con frecuencia se puede simplificar un problema en que se pide hallar el tamaño verdadero de un plano, utilizando una línea situada sobre el plano que ya esté en su longitud verdadera. La Fig. 2-25 muestra un plano y una línea *AB* situada sobre éste, que ya aparece en su longitud verdadera. En este caso la línea *AB* se representa como un punto en la vista 1, que muestra también el plano como un filo. La proyección sobre la vista 2 determina el tamaño verdadero del plano.

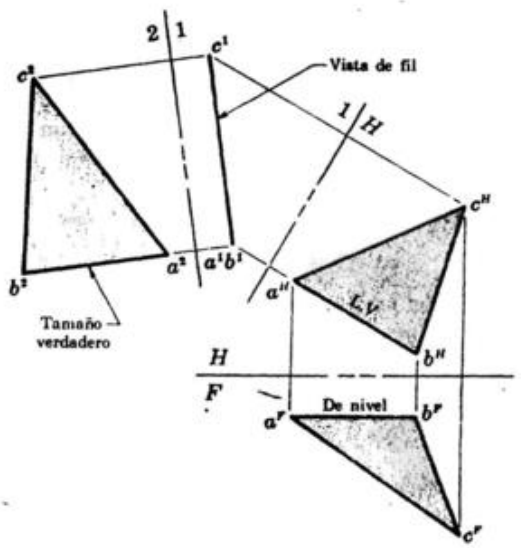


Fig. 2-25. Plano con una línea en verdadera longitud dada

2.4 LOCALIZAR UNA FIGURA PLANA DADA EN UN PLANO DADO

Análisis: Una vista que muestre el plano dado en su tamaño verdadero, mostrará también la forma y el tamaño verdaderos de la figura plana dada. Como se mencionó anteriormente, la vista del tamaño verdadero de un plano debe ser adyacente a una vista que muestre el plano como un filo y sus líneas de mira deben ser perpendiculares a la vista de filo.

Ejemplo: En la Fig. 2-26 se da el plano *ABCD* y el punto *X*, que es el centro de un cuadrado de 1" de lado, en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Dos lados del cuadrado son paralelos a los lados mayores del plano, el cual se representa por líneas paralelas. Dibuje una vista de elevación auxiliar que muestre el plano como un filo. A partir de esta vista de filo dibuje una vista inclinada que muestre las dimensiones verdaderas del plano *ABCD* y localice también el punto *X* sobre el plano. Usando *X* como centro, dibuje el cuadrado de 1" de lado que se pide con dos lados paralelos a *AB* y *CD*. Ahora se pueden proyectar los cuatro vértices del cuadrado a la vista de filo, y de ésta a la vista de planta y a la vista de elevación frontal.

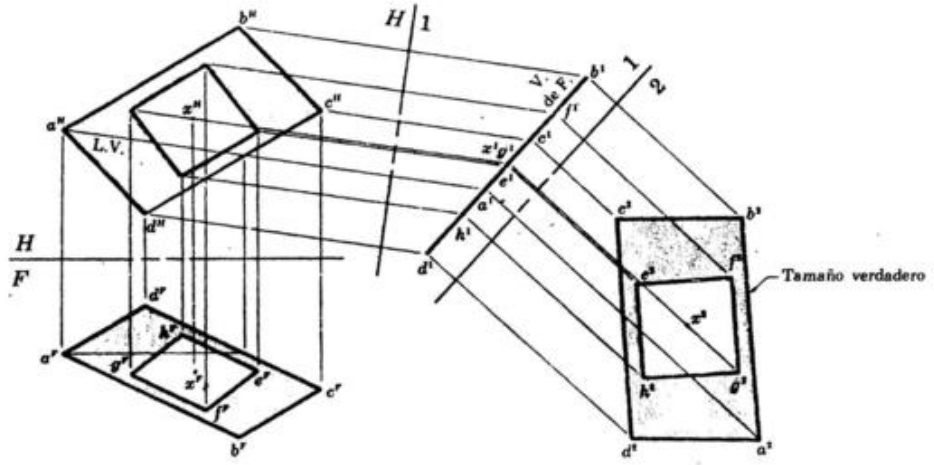


Fig. 2-26. Localizar una figura plana dada sobre un plano dado

2.5 TRAZAR UN CIRCULO DE DIAMETRO DADO SOBRE UN PLANO OBLICUO

Análisis: Un círculo aparecerá como un círculo o como una elipse en todas las vistas, excepto en la vista que muestre el círculo como un filo. Un diámetro de nivel aparecerá en verdadera longitud en la vista de planta y por tanto será el eje mayor

de la elipse. Una vista que muestre el plano oblicuo como un filo mostrará también el eje mayor como un punto. Usando esta vista de punta del eje como centro del círculo, mida el diámetro real dado del círculo. Proyecte este diámetro a la vista de planta para determinar el eje menor de la elipse. Utilizando el método del compás de varas (Ver Art. *A*.5) o cualquier otro método conveniente, se puede dibujar por completo la elipse en la vista de planta.

En la vista de elevación frontal se obtendrá la elipse por el mismo método, con la diferencia de que el eje mayor de la elipse será ahora una línea frontal que pasa por el centro dado y tiene una longitud igual al diámetro del círculo dado. Dibuje una vista inclinada que muestre el plano como un filo, el eje mayor como un punto y mida nuevamente el diámetro real del círculo dado. Proyecte este diámetro a la vista de elevación frontal para obtener el eje menor de la elipse.

Ejemplo: En la Fig. 2-27 se da el plano *ABC* y el centro de un círculo, el punto *X*, tanto en la vista de planta como en la vista de elevación frontal. Se pide localizar un círculo de diámetro dado en el plano *ABC*. De nuevo es necesario representar el plano como un filo, pero no es necesario mostrarlo en su forma y tamaño verdaderos. Habiendo localizado el punto *X* en la vista de filo del plano, mida el diámetro real del círculo. Este diámetro, representado por la línea 1-2, puede ahora proyectarse a la vista de planta, donde determinará el eje menor de la elipse. El eje menor estará localizado a través del punto *X* y perpendicular al eje mayor, el cual es representado por la línea 3-4. Utilizando el método del compás de varas o cualquier otro método corriente puede construirse la elipse en la vista de planta.

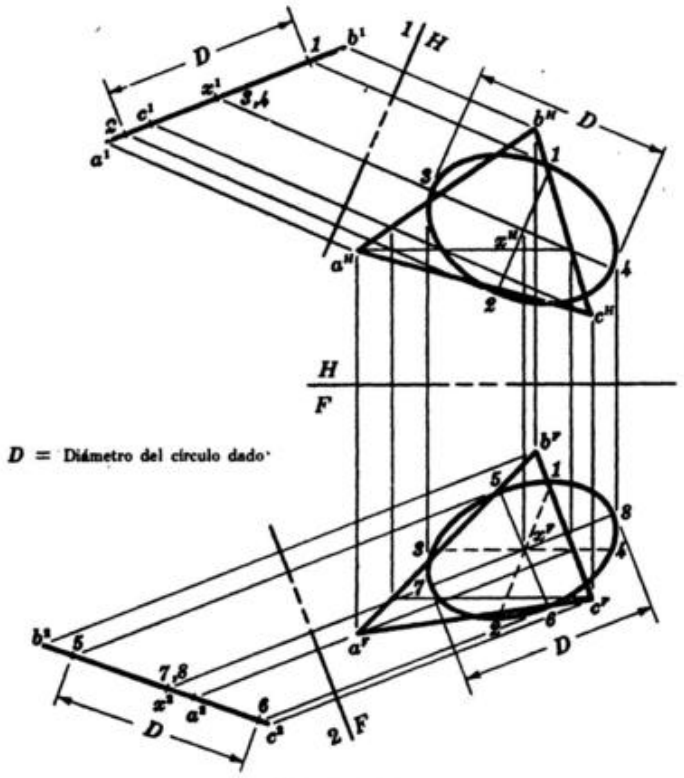


Fig. 2-27

Para completar la vista de elevación frontal dibuje una vista inclinada 2 que muestre el plano como un filo. Localice el punto *X* en esta vista y trace el diámetro verdadero del círculo dado. Por el punto *X* trace el eje mayor de la elipse igual al diámetro real del círculo dado, en la vista frontal. El eje menor, representado por la línea 5-6 puede proyectarse ahora a partir de la vista 2 sobre la vista de elevación frontal, donde se localizará perpendicular el eje mayor 7-8 y a través del punto *X*. Habiendo determinado los ejes mayor y menor puede construirse la elipse, como en la vista de planta.

Nota: Debe observarse que los ejes mayor y menor en una vista no corresponden necesariamente a los ejes mayor y menor en las vistas relacionadas. Sin embargo, una forma de comprobar la exactitud de un problema consiste en proyectar los puntos extremos derecho e izquierdo de la elipse, a partir de la vista de planta a la vista de elevación frontal.

Problemas resueltos

1. Dado: La vista de planta y la vista de perfil de la línea *AB* en la Fig. 2-28. Escala: $\frac{1}{4}'' = 1'—0''$.

Problema: Determine la longitud verdadera y la pendiente de la línea *AB*.

Solución:

De las dos vistas dadas proyecte la línea *AB* sobre la vista frontal. Dibuje una vista de elevación auxiliar con la línea de pliegue *H*-1 paralela a la vista de planta de la línea. La vista 1 mostrará la longitud verdadera y la pendiente de la línea *AB*.

Resp. L.V. = 5′—11″, pendiente 39°

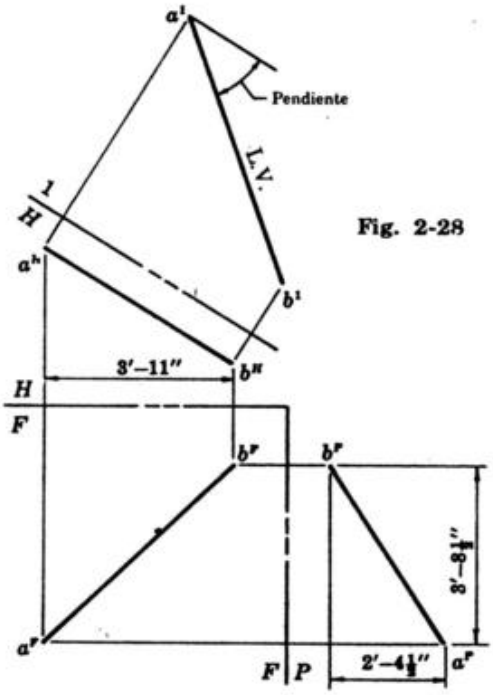


Fig. 2-28

2. Dado: *AB* es la línea media de un tubo que corre paralelo a una pared vertical de cierto edificio. Ver la Fig. 2-29. La distancia real entre *A* y *B* es 150′ y el punto *B* está situado 75′ por debajo de *A*. A 50′ de *B* está situada una unión. Escala: 1″ = 100′.

Problema: Localice el punto de intersección en los tres planos de proyección principales. ¿Cuál es la elevación de la unión, si la elevación del punto *A* es 350′ sobre el nivel del mar?

Solución:

Utilizando los datos, trace *AB* como una línea frontal que aparece en su longitud verdadera en la vista de elevación frontal. Mida sobre la línea una distancia de 50′ a partir de *B*, en la vista frontal. Llame este punto *C*. Dibuje una vista de perfil de la línea *AB* y proyecte el punto *C* sobre esta vista, así como también sobre la vista de planta. La elevación del punto *C* se puede medir sobre la vista frontal o en la vista de elevación. *Resp.* Elevación = 300′ sobre el nivel del mar

3. Dado: El plano *ABC* en la Fig. 2-30. El punto *B* está 4′ al este, 2′ al sur y 6′ por debajo de *A*. El punto *C* está 7′ al este, 3′ al norte y 2′ por encima de *A*. El punto *X*, situado sobre el plano, está 2′ al este, 1′ al sur y 3′ por debajo de *A*. Escala: $\frac{1}{8}'' = 1'—0''$.

Problema: ¿Cuál es el rumbo de una línea de nivel situada sobre el plano que pasa por el punto *X*?

Solución:

Dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal del plano *ABC* y del punto *X*. Trace una línea de nivel que pase por el punto *X* hasta que intersecte la línea *BC*, en la vista frontal. Llame este punto de intersección *Y* y proyéctelo sobre la vista de planta. Mida el rumbo de la línea *XY* en la vista de planta.

Resp. Rumbo de *XY* = N 73° E

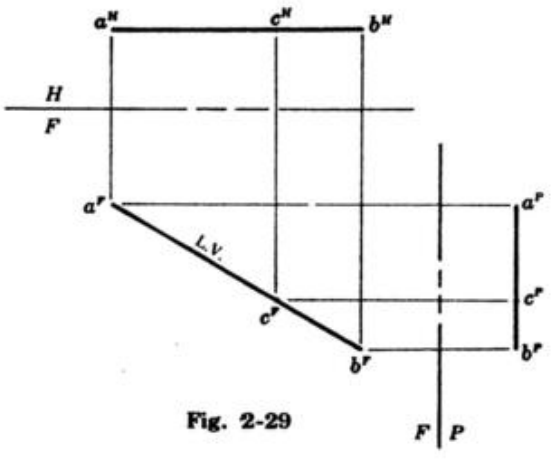


Fig. 2-29

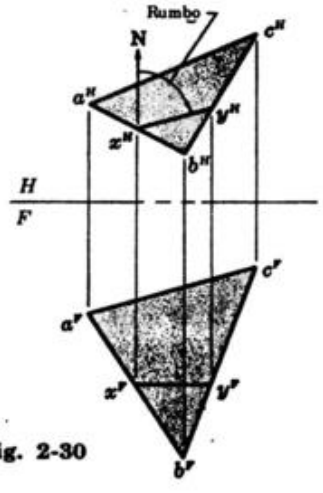


Fig. 2-30

4. Dado: Un túnel situado en el fondo de un pozo vertical tiene un rumbo N 35°15′ O. El túnel tiene una inclinación descendente del 20% y una longitud de 128′. Escala: 1″ = 80′.
Problema: ¿Cómo aparecerá el túnel en la vista de planta y cómo en la vista de elevación frontal? ¿Cuál es la diferencia de elevación entre los dos extremos del túnel?

Solución:

Localice el punto *A* tanto en la vista de planta como en la vista de elevación frontal. Ver la Fig. 2-31. Por el punto *A* trace una línea de longitud indefinida con rumbo N 35°15′ O, en la vista de planta. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 que muestre la longitud verdadera y la inclinación del túnel que parte de *A*. Llame *B* el extremo más bajo del túnel y proyéctelo sobre la vista de planta y sobre la vista frontal. La distancia vertical entre los extremos del túnel se puede medir en la vista frontal o en la vista de elevación auxiliar 1. *Resp.* Diferencia de elevación = 25′

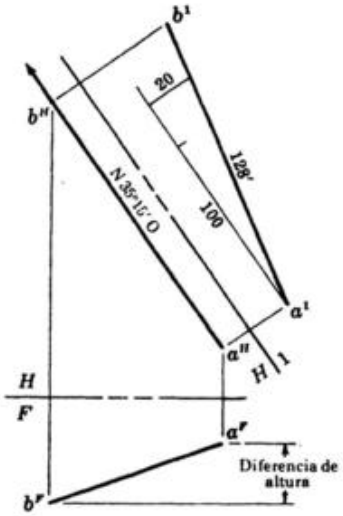


Fig. 2-31

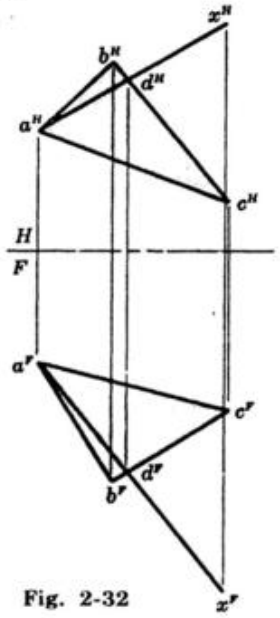


Fig. 2-32

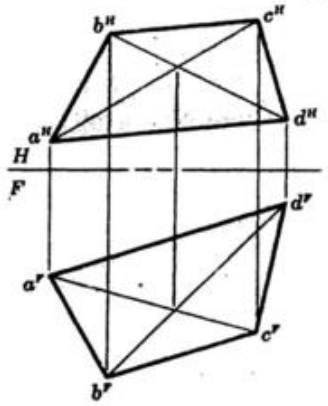


Fig. 2-33

5. Dado: El plano *ABC* en la Fig. 2-32. El punto *B* está 3′ al este, 3′ al norte y 5′ por debajo de *A*. El punto *C* está 8′ al este, 3′ al sur y 2′ por debajo de *A*. El punto *X*, situado sobre el plano *ABC*, está a una distancia horizontal de 9′ de *A* y sobre un rumbo N 60° E, a partir de *A*. Escala: $\frac{1}{8}'' = 1'—0''$.
Problema: Localice el punto *X* en la vista de elevación frontal.

Solución:

Utilizando los datos, dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal del plano *ABC*. A partir del punto *A* trace una línea con rumbo N 60° E y longitud 9′, en la vista de planta. Llame *D* el punto de intersección de las líneas *AX* y *BC*. Localice el punto *D* en la vista frontal. A partir del punto *A* trace una línea que pase por el punto *D*, en la vista frontal, hasta encontrar la proyección de *X* procedente de la vista de planta. Esta intersección establece la vista frontal del punto *X*.

6. Dado: El cuadrilátero *ABCD* en la Fig. 2-33.
Problema: Determinar si este cuadrilátero es un plano.

Solución:

Una *A* con *C* y *B* con *D* en ambas vistas, formando una intersección de dos líneas. Si el punto de intersección puede ser proyectado directamente entre las vistas, entonces el cuadrilátero es una figura plana.

7. Dado: Un plano está determinado por *ABCD* [*A*(1, 1, 4) *B*($1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{4}$, 3) *C*(4, $1\frac{1}{2}$, *X*) *D*($3\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $4\frac{3}{4}$)]. Ver Fig. 2-34. (Ver el Art. 1.7 de presentación de problemas con coordenadas.)
Problema: Complete la vista de planta y determine el ángulo formado por el plano y un plano horizontal.

Solución:

Para localizar el punto *C* en la vista de planta, represente el plano por medio de líneas que se cortan. Dibuje una vista de elevación auxiliar que muestre el plano como un filo. Esta vista de elevación 1 mostrará la pendiente del plano. *Resp.* Pendiente = 50°

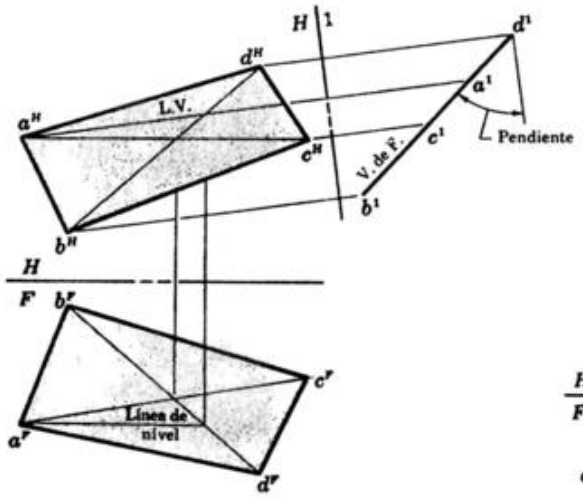


Fig. 2-34

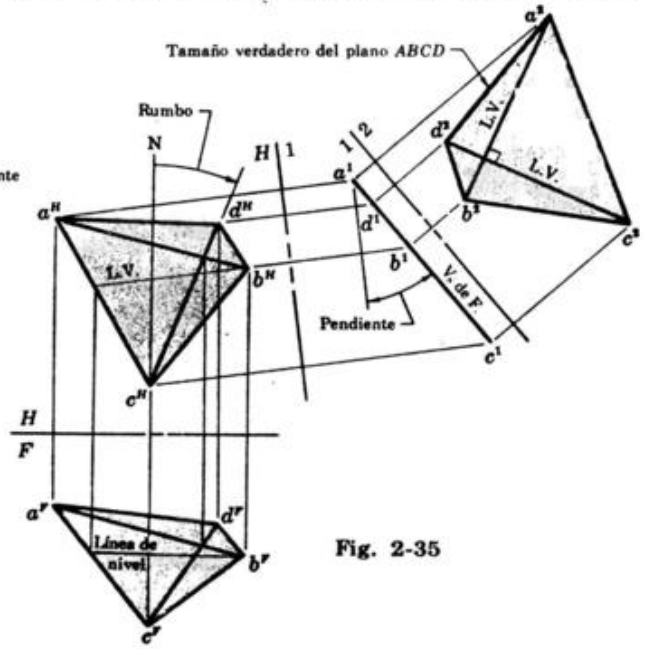


Fig. 2-35

8. Dado: Las diagonales de un plano están representadas por las líneas *AB* y *CD* [*A*(1, 2½, 5½) *B*(3, 2, 5) *C*(2, 1¼, 3¾)]. Las diagonales son de igual longitud y se intersectan en ángulo recto. Escala: ⅛″ = 1′—0″.

Problema: Determine el tamaño verdadero y la pendiente del plano *ABCD*. Encuentre la verdadera longitud y el rumbo de la línea *CD*. Complete la vista de planta y la vista frontal del plano.

Solución:

Una los puntos *A*, *B* y *C* en la vista de planta y en la vista frontal, como se muestra en la Fig. 2-35. Dibuje una vista de elevación auxiliar que muestre el plano como un filo. La pendiente del plano se mide en esta vista. Dibuje una vista inclinada 2 que muestre el plano *ABC* en su tamaño verdadero. Por el punto *C* trace una perpendicular a *AB*. Halle el punto *D* sobre esta perpendicular, haciendo la longitud de *CD* igual a la longitud de *AB*. El plano *ABCD* aparece en su tamaño verdadero en esta vista 2. Proyecte el punto *D* sobre las otras vistas y únalo con el punto *C*. El rumbo de *CD* se medirá en la vista de planta. (Ver el Art. 2.3.4)

Resp. L.V. = 8′—6″, pendiente del plano = 33°30′, rumbo = N 22° E

9. Dado: Una cañería tiene 160′ de longitud, un rumbo S 45° E y una pendiente descendente de 20°. El extremo más alto de la cañería tiene una elevación de 200′. Escala: 1″ = 100′.

Problema: Dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal de la cañería. ¿Cuál es la elevación del extremo más bajo?

Solución:

A partir del punto *A* trace una línea de longitud indefinida con rumbo S 45° E. Ver la Fig. 2-36. Coloque la línea de pliegue *H*-1 paralela a la vista de planta de la línea que parte de *A*. Proyecte sobre la vista de elevación auxiliar 1, donde la línea *AB* aparecerá en su verdadera longitud de 160′ y tendrá una pendiente de 20°. Proyecte el punto *B* a la vista de planta. Los puntos *A* y *B* pueden localizarse ahora en la vista de elevación frontal. La elevación del punto *B* puede medirse en la vista de elevación frontal o en la vista de elevación auxiliar 1. *Resp.* Elevación de *B* = 145′

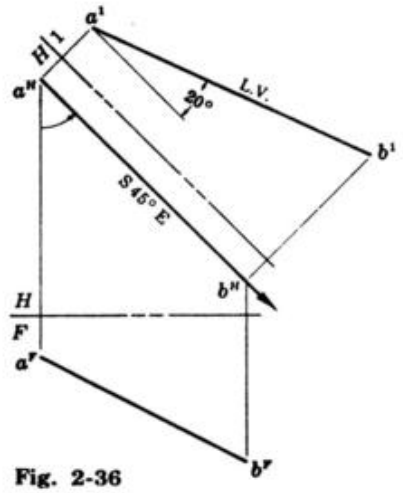


Fig. 2-36

10. Dado: La línea *YZ* en la vista de planta, el punto *X* en la vista frontal y el plano *ABC* en ambas vistas. La línea *YZ* y el punto *X* están situados sobre el plano *ABC*. Ver la Fig. 2-37.

Problema: Complete la vista de planta y la vista de elevación frontal.

Solución:

Para localizar el punto *X* en la vista de planta, trace una línea a partir de *A*, que pase por *X*, hasta que intersecte la línea *BC*, en la vista frontal. Proyecte este punto de intersección sobre la vista de planta y muestre en esta vista la línea que parte de *A*. Proyecte el punto *X* a partir de la vista frontal hasta que corte la línea que parte de *A*, en la vista de planta. Esta intersección determinará el punto *X* en la vista de planta. Para localizar la línea *YZ* en la vista de elevación frontal, proyecte las intersecciones de la línea con el plano a partir de la vista de planta sobre la vista frontal. Estas intersecciones sobre las líneas *AC* y *BC* determinarán la dirección de la línea en la vista frontal. Los extremos de la línea se determinarán proyectando los puntos *Y* y *Z* hasta intersectar la línea, en la vista frontal. (Ver el Art. 2.2)

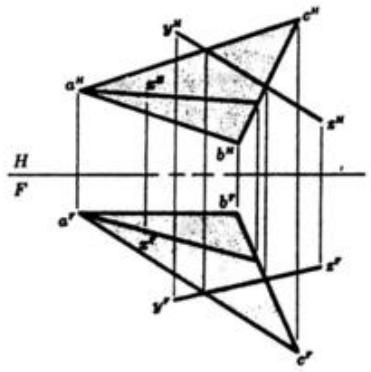


Fig. 2-37

11. Dado: Escala: 1″ = 80′. Los puntos *A* y *B* son las entradas de dos pozos excavados en una mina de carbón. *A* está localizado 120′ al este, 40′ al sur y 30′ por debajo de *B*. El pozo que parte de *A* tiene un rumbo N 30° O y una pendiente descendente de 20°. El pozo que parte de *B* tiene un rumbo N 50° E y avanza en este sentido hasta intersectar el pozo que parte de *A*.

Problema: Determine la longitud real de cada pozo. ¿Cuál es la pendiente del pozo que parte de *B*? Muestre ambos pozos en la vista de elevación frontal.

Solución:

Utilizando los datos, localice los puntos *A* y *B* en la vista de planta y en la vista de elevación frontal, como se muestra en la Fig. 2-38. Trace una línea a partir de *A* con rumbo N 30° O y otra a partir de *B* con rumbo N 50° E, en la vista de planta. Llame *C* al punto de intersección entre estas dos líneas. Construya una vista de

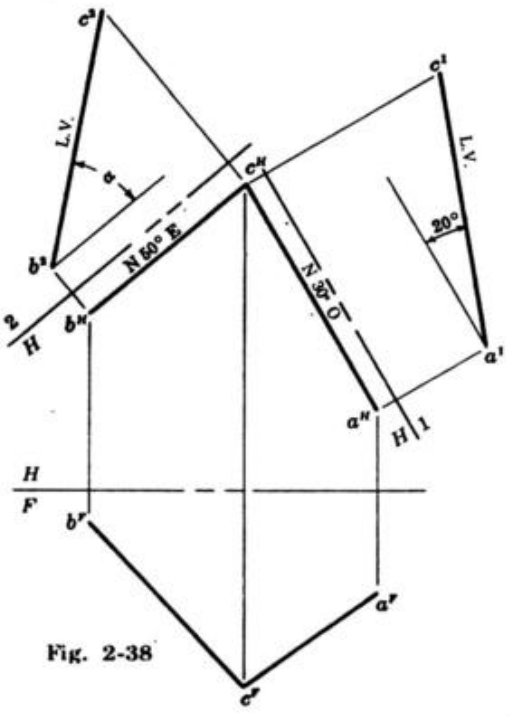


Fig. 2-38

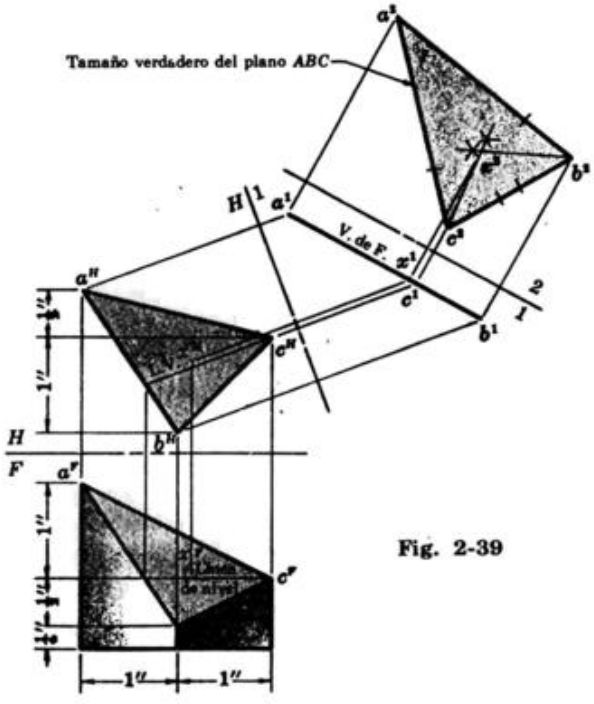


Fig. 2-39

elevación auxiliar 1 para determinar la verdadera longitud del pozo que va de *A* a *C*. Luego dibuje otra vista de elevación auxiliar 2 para determinar la verdadera longitud y la pendiente del túnel *BC*. Proyecte el punto *C* sobre la vista frontal y localice su elevación, igual a la hallada en la vista 1.
Resp. L.V. de $AC = 116'$, L.V. de $BC = 110'$, pendiente de $BC = 39°$

12. Dado: La Fig. 2-39 muestra la vista de planta y la vista de elevación frontal de un prisma triangular truncado. Escala: $\frac{1}{2}'' = 1''$.
Problema: Determine la localización del punto *X* sobre el plano oblicuo *ABC*, el cual es equidistante de los 3 bordes del plano. ¿A qué altura por encima de la base del prisma estará el punto *X*? Muestre el punto *X* en todas las vistas.

Solución:

Dibuje una vista de elevación auxiliar que muestre el plano *ABC* como un filo. A partir de esta vista proyecte una vista inclinada que muestre el tamaño verdadero del plano. Utilizando los ángulos bisectrices, localice el punto *X* equidistante de los tres bordes del plano. Proyecte el punto *X* sobre las otras vistas. En la vista frontal mida la distancia vertical del punto *X* a la base del prisma. *Resp.* $\frac{13}{16}''$.

13. Dado: La Fig. 2-40 muestra la cercha situada entres dos edificios adyacentes. Escala: $\frac{1}{16}'' = 1'—0''$.
Problema: Determinar la longitud real de los miembros *AB* y *CD* de la cercha. ¿Cuál es la longitud real y el porcentaje de declive del miembro *BC*?

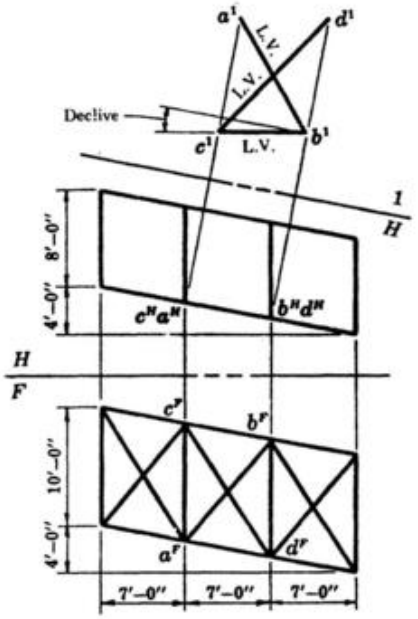


Fig. 2-40

Solución:

Coloque una línea de pliegue *H*-1 paralela a la vista de planta de *CABD*. Proyecte para obtener una vista de elevación auxiliar. Esta vista de elevación auxiliar mostrará la longitud verdadera y el declive que se pide.
Resp. L.V. de $AB = 11'—3''$, $CD = 13'—3''$, $BC = 7'—2\frac{1}{2}''$. Declive de $BC = 18\%$

14. Dado: Un techo a cuatro aguas que se ha de cubrir con tejas de asbesto se muestra en la Fig. 2-41. Escala: $1' = 30''$.
Problema: Muestre el tamaño verdadero de los planos *A* y *B*. ¿Cuántos "cuadrados" de tejas serán necesarios para cubrir el techo? (1 cuadrado = 100′ cuadrados)

Solución:

Puesto que el plano *B* se muestra como un filo en la vista de elevación frontal, se coloca la línea de pliegue *F*-1 paralela a esta vista de filo para obtener una vista inclinada que muestre el tamaño verdadero del plano *B*. Coloque una línea de pliegue *F*-*P* o *H*-*P* perpendicular a la línea de pliegue *H*-*F* con la cual obtiene una vista de filo del plano *A*. Coloque una línea de pliegue paralela a esta vista de filo del plano *A*, y proyecte para obtener el tamaño verdadero del plano *A*. Calcule el área de los planos *A* y *B* y luego multiplique por dos, puesto que hay dos planos de cada tamaño. *Resp.* 12 cuadrados

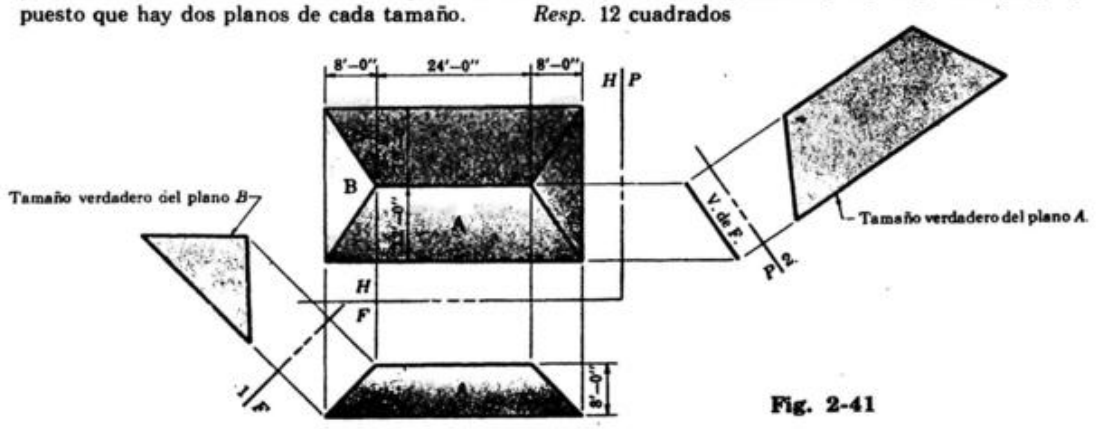


Fig. 2-41

15. Dado: *AB* y *CD* son las líneas medias de dos conductos de un transportador, cuyas secciones transversales son circulares. Desde *A* parte un conducto que tiene un rumbo N 45° O, una longitud de 75′ y un ángulo de pendiente de —20°, medido en *A*. El punto *C* está localizado 50′ al este y a la misma elevación de *A*. Del punto *C* parte un conducto cuyo rumbo es N 15° E, su longitud 55′ y su ángulo de pendiente —15° a partir de *C*. Ambos conductos tienen un diámetro de 3′—0″. Ver la Fig. 2-42. Escala 1″ = 40′.

Problema: ¿Cuál es el espacio libre vertical entre los dos conductos?

Solución:

Localice los puntos *A* y *C* en la vista de planta. Trace dos líneas de longitud indefinida, a partir de *A* y *C* con los rumbos dados. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 para determinar el otro extremo del conducto que comienza en *A*. Llame este punto *B* y proyéctelo a la vista de planta. Dibuje una vista de elevación auxiliar 2 para mostrar la longitud verdadera y la pendiente del conducto que parte de *C*. Llame *D* el otro extremo de este conducto. Proyecte los puntos *A* y *B* a partir de la vista de planta sobre la vista de elevación auxiliar 2. La intersección de las líneas, con sus respectivos rumbos, en la vista de planta, determinará la distancia vertical o espacio libre en la vista de elevación 2. *Resp.* 6′—6″

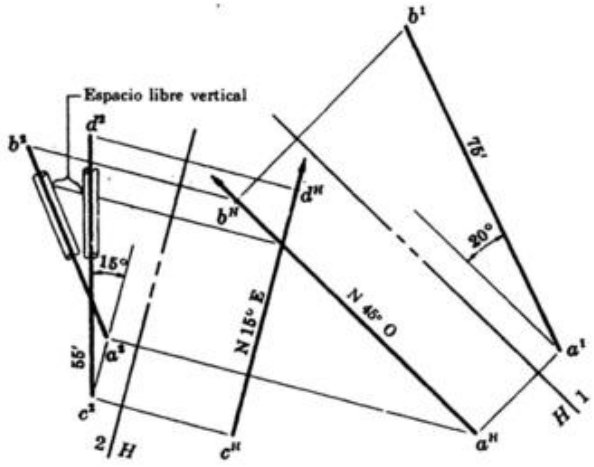


Fig. 2-42

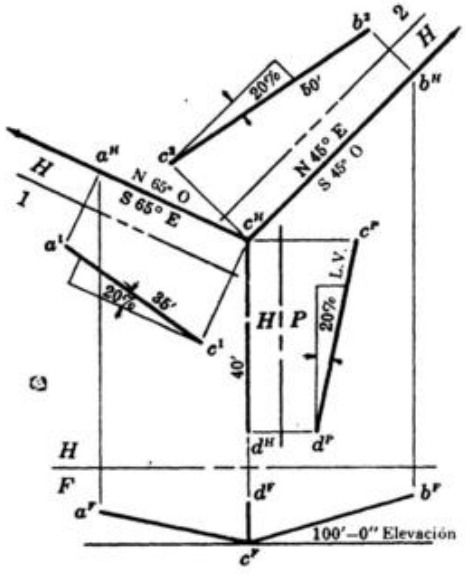


Fig. 2-43

16. Dado: Tres cañerías de barro cocido que arrancan desde *A*, *B* y *D*, convergen en una boca de acceso *C*. El punto *D* está localizado 40′ exactamente al sur de la boca de acceso y tiene un declive del 20%. La cañería que parte de *A* tiene un rumbo S 65° E y su longitud es de 35′. La línea que arranca de *B* tiene un rumbo S 45° O y su longitud es 50′. Las líneas que parten de *A* y de *B* respectivamente, tienen el mismo declive que la cañería que parte de *D*. El punto *C* tiene una elevación de 100′ sobre el nivel del mar. Escala: 1″ = 40′.

Problema: ¿Cuál es la longitud real de la cañería *CD*? ¿Cuál es la elevación de los puntos *A*, *B*, y *D*? Muestre la vista de planta y la vista de elevación frontal de la cloaca.

Solución:

Localice la línea *CD* en la vista de planta, así como también las líneas que parten de *C*, con sus respectivos rumbos, sobre las cuales serán localizados los puntos *A* y *B*. Ver la Fig. 2-43. Una vista de perfil de la línea *CD* determinará la longitud verdadera de esta línea y localizará el punto *C* en todas las vistas de elevación. Coloque las líneas de pliegue *H*-1 y *H*-2 paralelas a las líneas que tienen los rumbos dados, las cuales contienen los puntos *A* y *B* respectivamente. Proyecte el punto *C* a las vistas de elevación auxiliares. Dibuje los declives dados y las longitudes verdaderas de las líneas *CA* y *CB*. De las vistas 1 y 2 proyecte los puntos *A* y *B* a la vista de planta y de aquí a la vista frontal. Las elevaciones relativas de los puntos *A*, *B* y *D* con respecto al punto *C* pueden medirse individualmente en las vistas de elevación que muestren su longitud verdadera, o pueden medirse todas con respecto a una línea base horizontal que pase por el punto *C* en la vista de elevación frontal.

Resp. L.V. de *CD* = 41′—0″, elevación de *A* = 106′—6″, elevación de *B* = 110′—0″, elevación de *D* = 108′—6″

17. Dado: Dos túneles excavados en una mina parten de un punto común *A* situado sobre un pozo vertical, como se muestra en la Fig. 2-44. El túnel *AB* tiene 160′ de longitud, un rumbo S 42°15′ E y un ángulo de pendiente descendente de 24°. El túnel *AC* tiene 110′ de longitud, un rumbo N 40°30′ E y un ángulo de pendiente descendente de 18°. Escala: 1″ = 100′.

Problema: Si se excavara un nuevo túnel que uniera los puntos *B* y *C*, ¿cuál sería su longitud, su rumbo y su porcentaje de pendiente?

Solución:

Utilizando los datos, localice el punto *A* en la vista de planta y trace por este punto dos líneas de longitud indefinida con los rumbos dados. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 que muestre uno de los túneles que parten de *A* en su verdadera longitud. Proyecte el extremo *B* de este túnel a la vista de planta. Dibuje una vista de elevación auxiliar 2 que muestre el segundo túnel que parte de *A* en su verdadera longitud. Proyecte también el extremo *C* de este túnel a la vista de planta. Una los puntos *B* y *C* en la vista de planta y mida el rumbo del nuevo túnel. Dibuje una vista de elevación auxiliar 3 que muestre la longitud verdadera y el declive del nuevo túnel que une *B* con *C*.

Resp. L.V. de *BC* = 192′, rumbo de *BC* = N 9° O, tanto por ciento de pendiente de *BC* = 15%

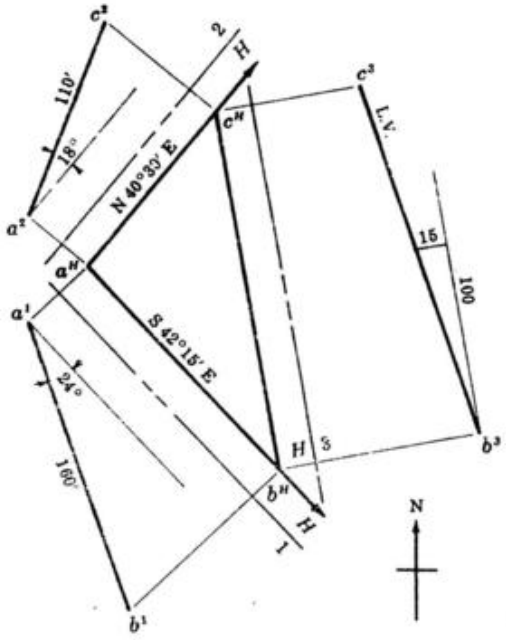


Fig. 2-44

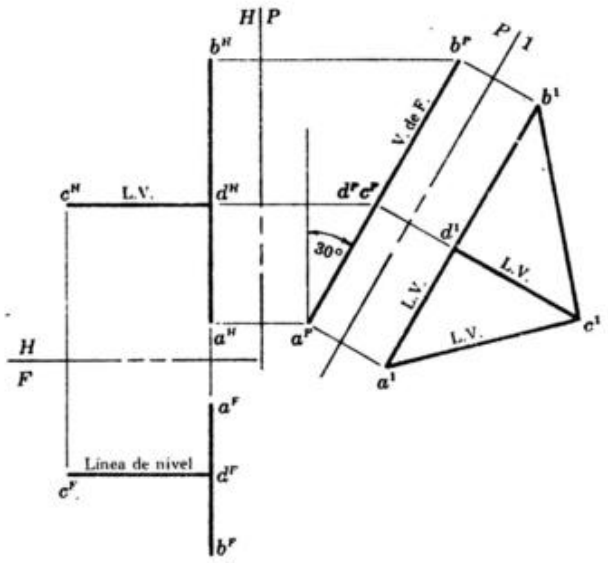


Fig. 2-45

18. Dado: Un pozo *AB* excavado en una mina tiene un ángulo de pendiente de 30° a partir de *A*. El punto *B* está localizado 55′ exactamente al norte de *A*. Se propone unir el pozo con un conducto de ventilación horizontal que parte del punto *C*, en otro pozo. El punto *C* está 30′ al oeste y 25′ al norte de *A*. Los puntos *A*, *B* y *C* están situados sobre un plano perpendicular al plano de perfil. Ver la Fig. 2-45. Escala: 1″ = 40′.

Problema: Localice el punto *C* en la vista de elevación frontal. ¿Cuál será la longitud real del conducto de ventilación? ¿A qué distancia del punto *A* penetrará el conducto en el pozo *AB*? ¿Cuál es la distancia real del punto *C* al punto *A*?

Solución:

Utilizando los datos, localice la vista de planta del pozo y del punto *C*. Dibuje una vista de perfil que muestre la pendiente del plano *ABC*. La línea *AB* y el punto *C* pueden localizarse ahora en la vista de elevación frontal. Una vista inclinada 1 mostrará el tamaño verdadero del plano *ABC*. Todas las medidas se pueden tomar en esta vista aun cuando la verdadera longitud del conducto de ventilación puede obtenerse también en la vista de planta y en la vista frontal.

Resp. L.V. de *CD* = 30′—0″, distancia desde *A* = 29′—0″, distancia de *C* a *A* = 41′—6″

19. Dado: La Fig. 2-46 muestra una estructura simétrica "A" que se utiliza en una planta industrial, como soporte. Escala = $\frac{3}{16}'' = 1'—0''$.
Problema: ¿Cuál es la longitud real y la pendiente de los miembros de la estructura *AB*, *AF* y *BF*?

Solución:

Trace las líneas de pliegue *H*-1, *H*-2 y *H*-3 paralelas a las vistas de planta de las líneas *AB*, *AF* y *BF*, respectivamente. Proyecte a estas vistas de elevación auxiliar para obtener la longitud verdadera y la pendiente de las líneas *AB*, *AF* y *BF*.

Resp. L.V. de AB = 11′—10″, pendiente de AB = 57°30′
L.V. de AF = 8′—6″, pendiente de AF = 36°
L.V. de BF = 6′,—6″, pendiente de BF = 50°30′

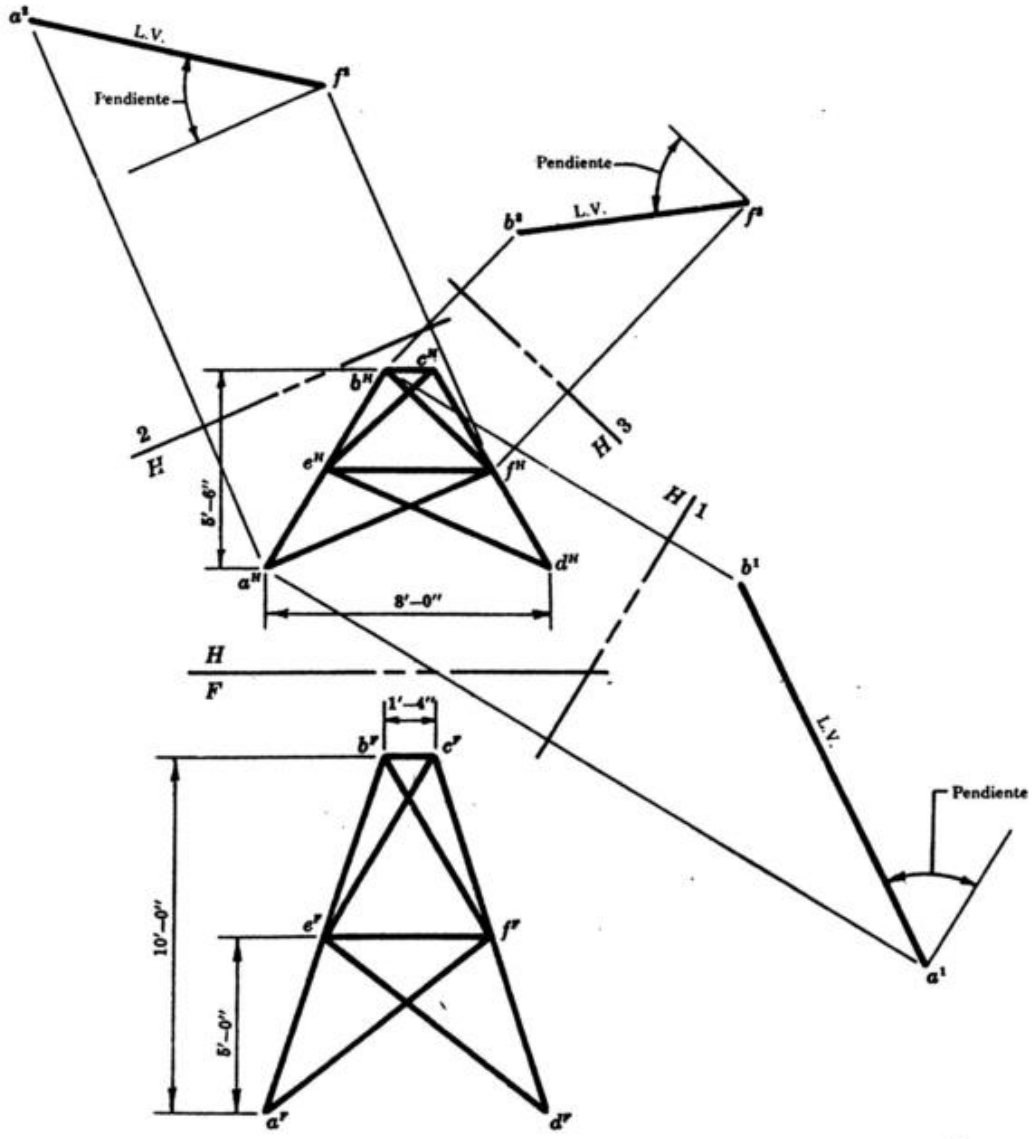


Fig. 2-46

20. Dado: Una antena de televisión *AB* de 12′ de altura es instalada encima de un edificio de apartamentos. Su estabilidad se guarda por medio de tres vientos de alambre, localizados así: *C* está 8′ al sur y 7′ al este de *AB* y 2′ más alto que *B*. *D* está 4′ al sur y 9′ al oeste de *AB* y está sujeto a un ancla que está 3′ por encima de *B*. El punto *E* está 8′ al norte, 2′ al este y a la misma elevación de *B*. Ver la Fig. 2-47. Escala: $\frac{1}{8}'' = 1' - 0''$.

Problema: ¿Cuál es la longitud real y el rumbo de cada viento? ¿Qué ángulo hace cada viento con la antena? Muestre la antena en todas las vistas.

Solución:

Utilizando los datos muestre la antena y los vientos en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Mida el rumbo de cada viento en la vista de planta. Dibuje las vistas de elevación auxiliar 1, 2 y 3 para mostrar las longitudes verdaderas de los vientos y la antena. Mida el ángulo formado por el viento y la antena en cada una de las vistas auxiliares de elevación.

Resp. viento *AC:* L.V. = 14′—6″, rumbo = S 41° E, ángulo $\alpha = 47°$
viento *AD:* L.V. = 13′—4″, rumbo = S 66° O, ángulo $\beta = 48°$
viento *AE:* L.V. = 14′—6″, rumbo = N 15° E, ángulo $\gamma = 34°$

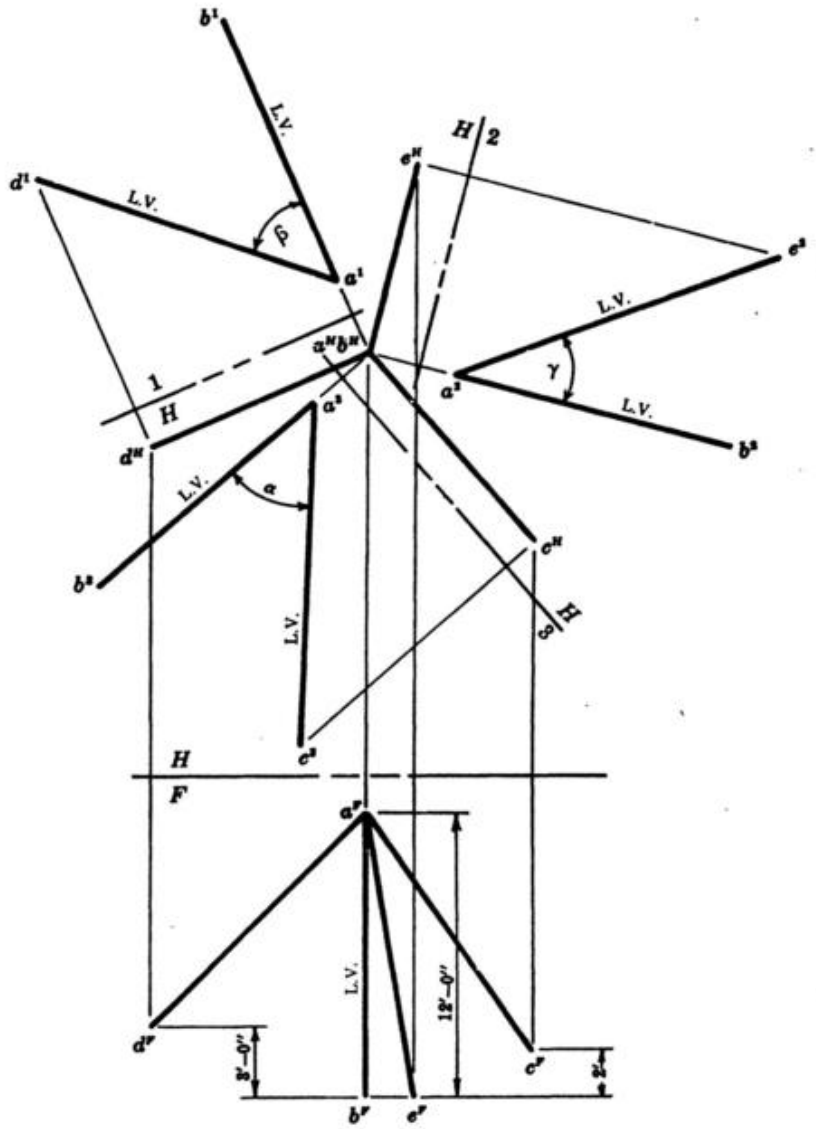


Fig. 2-47

21. Dado: El plano *ABC* se muestra en la Fig. 2-48. *B* está 25′ al oeste, 20′ al sur y a la misma elevación de *A*. *C* está 12′ al oeste, 20′ al sur y 15′ por encima de *A*. Escala: 1″ = 20′.

Problema: Usando dos vistas únicamente, localice el punto *X* sobre el plano a una elevación de 5′ por encima de *A* y 10′ al sur de *A*. Muestre este punto *X* en ambas vistas. Determine la distancia real de *A* al punto *X*.

Solución:

Dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal del plano *ABC*. Trace sobre el plano una línea de nivel 5′ por encima de *A*, en la vista frontal. Muestre en la vista de planta la intersección de esta línea de nivel con una línea frontal trazada 10′ al sur de *A*′. Esta intersección determinará la posición del punto *X* en la vista de planta. Proyecte el punto *X* a partir de la vista de planta sobre la vista de elevación frontal. Para encontrar la distancia real de *A* a *X*, dibuje una vista de elevación auxiliar que tenga la línea de pliegue *H*-1 paralela a la línea *AX* trazada en la vista de planta.

Resp. L. V. de *AX* = 13′ — 10″

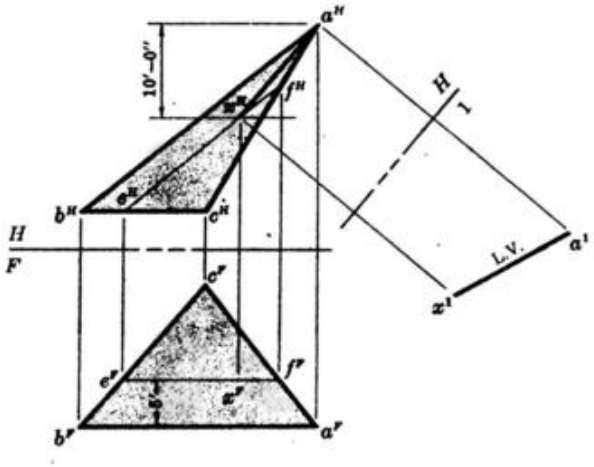


Fig. 2-48

22. Dado: El plano *ABC* se muestra en la Fig. 2-49. *B* está 20′ al este, 30′ al norte y 25′ por debajo de *A*. *C* está 60′ al este, 10′ al norte y 15′ por debajo de *A*. Escala 1″ = 40′.

Problema: ¿Cuál es la pendiente del plano? Determine el diámetro del máximo círculo que puede ser inscrito en el plano *ABC*.

Solución:

Utilizando los datos dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal del plano *ABC*. Trace una línea de nivel sobre la vista frontal del plano. Esta línea de nivel se presentará en su verdadera longitud en la vista de planta. Coloque la línea de pliegue *H*-1 perpendicular a la longitud verdadera de la línea de nivel y proyecte el plano sobre esta vista de elevación auxiliar. La pendiente se medirá en la vista 1. Coloque la línea de pliegue 1-2 paralela a la vista de filo del plano y proyecte sobre la vista 2 para obtener el tamaño verdadero del plano. Bisecte los ángulos para obtener el centro del círculo inscrito. Trace el círculo inscrito y mida su diámetro en la vista 2.

Resp. Pendiente del plano *ABC* = 38°, diámetro del círculo = 26′ —0″

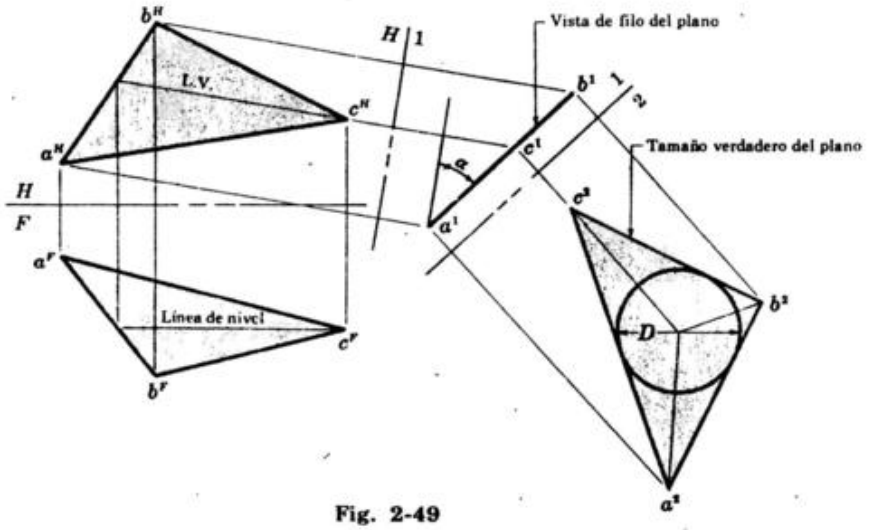


Fig. 2-49

23. Dado: Dos "líneas de enlace" de un colector sanitario parten de un punto común *A*, en una boca de inspección. Ver Fig. 2-50. La línea de alcantarillado *AB* tiene 50′ de longitud, una caída del 20% y un rumbo N 60° O. La línea de alcantarillado *AC* tiene 45′ de longitud, una caída de 15° y su rumbo está dirigido exactamente hacia el sur. Ambas líneas de alcantarillado terminan en un conducto principal, el cual se dirige a un río. Escala: 1″ = 40′. **Problema:** ¿Qué distancia hay entre los puntos *B* y *C*? ¿Cuál es el rumbo de la línea principal de alcantarillado que une los puntos *B* y *C*? Determine la pendiente, expresada en grados, de la línea de alcantarillado que va de *B* a *C*.

Solución:

Utilizando los datos, trace dos líneas de longitud indefinida con las direcciones indicadas por los rumbos, a partir de *A*. Dibuje una vista de perfil que muestre la longitud verdadera y la pendiente de la línea de alcantarillado *AC*. Proyecte el punto *C* a la vista de planta. Dibuje una vista de elevación auxiliar que muestre la longitud verdadera y la pendiente de la línea de alcantarillado *AB*. Proyecte el punto *B* a la vista de planta. Una los puntos *B* y *C* en la vista de planta y mida el rumbo de la línea *BC*. Coloque la línea de pliegue *H*-2 paralela a la vista de planta de *BC* y proyecte sobre la vista de elevación auxiliar 2 para obtener la longitud verdadera y la pendiente de *BC*.

Resp. L.V. de *BC* = 79′, rumbo de *BC* = S 32° E, pendiente de *BC* = −4°

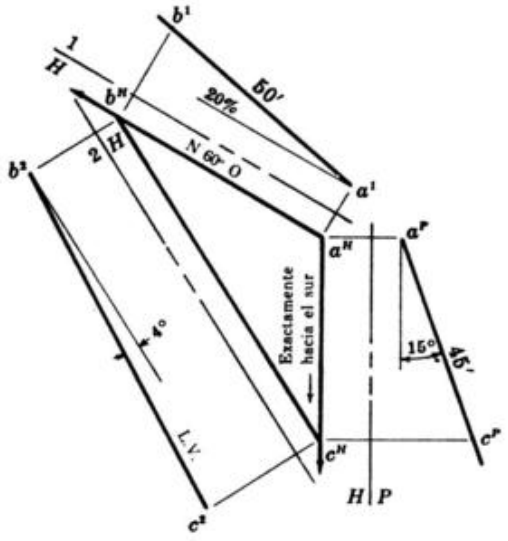


Fig. 2-50

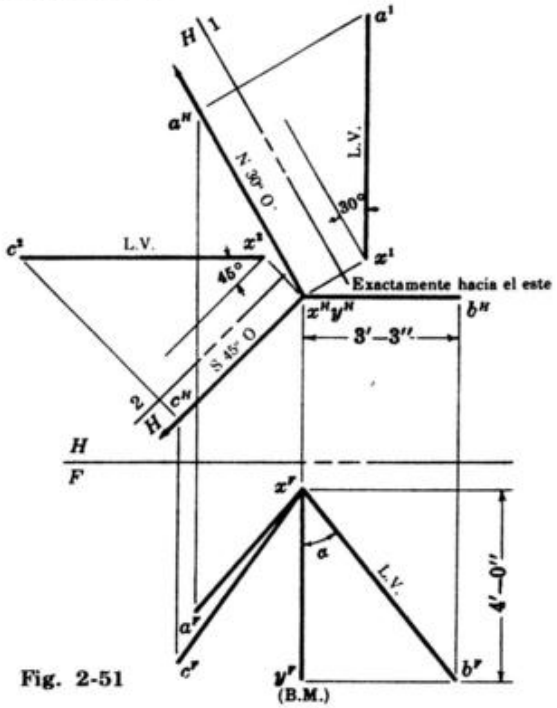


Fig. 2-51

24. Dado: Las tres patas iguales de un trípode de agrimensor están localizadas con respecto a la línea de plomada así: La pata *A* tiene un rumbo N 30° O y un ángulo de pendiente de 30°; la pata *B* se extiende 3′—3″ exactamente hacia el este de la línea de plomada y está a la misma elevación que el punto topográfico de referencia. La plomada toca el punto topográfico de referencia en un punto situado 4′ por debajo del extremo superior de la línea de plomada. La pata *C* tiene un rumbo S 45° O y una pendiente de 45°. Escala: $\frac{1}{4}$″ = 1′—0″.

Problema: Determine la longitud real de las patas *A*, *B* y *C*. ¿Qué ángulo hace la pata *B* con la línea de plomada? Muestre las tres patas en la vista de planta y en la vista frontal.

Solución:

Dibuje parte de la vista de planta y de la vista de elevación frontal. Ver Fig. 2-51. Puesto que la pata *XB* es una línea frontal, aparecerá en su verdadera longitud en la vista frontal y de esta manera quedarán determinadas también las longitudes verdaderas de las otras dos patas, *XA* y *XC*. El ángulo formado por *XB*

y la línea de plomada se mide en la vista frontal. Pase dos líneas de pliegue H-1 y H-2 paralelas a la patas XA y XC respectivamente. En cada una de las dos vistas de elevación auxiliares trace el ángulo de pendiente dado y mida la longitud verdadera de cada pata. Proyecte los puntos A y C a la vista de planta y a la vista frontal.

Resp. L. V. de las patas A, B y C = 5'—2"; ángulo entre la pata B y la línea de plomada = 39°

25. Dado: El sistema de transporte de una línea de montaje está proyectado como se indica en la siguiente tabla:

Sección	Rumbo	Pendiente	Longitud
AB	N 45° O	—20%	120'
BC	Exact. hacia el oeste	0	90'
CD	S 25° O	—20°	135'

Una revisión en los métodos de producción exige la eliminación del sistema de transporte actual y la instalación de un nuevo transportador que vaya directamente de A a D. Escala: 1" = 120'.

Problema: ¿Cuál sería la longitud verdadera, la pendiente expresada en grados y el rumbo del nuevo transportador? Dibuje la vista de planta y las vistas de elevación necesarias para mostrar el sistema de transporte.

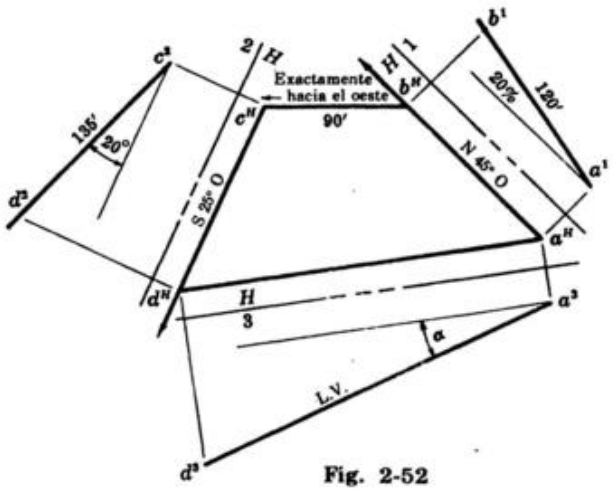


Fig. 2-52

Solución:

Utilizando los datos, trace una línea con rumbo N 45° O y longitud indefinida a partir del punto A, en la vista de planta. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 que muestre la longitud verdadera y la pendiente de la línea AB Proyecte el punto B a la vista de planta. Repita el procedimiento para las líneas BC y CD hasta que el punto C quede localizado en la vista de planta. Coloque una línea de pliegue H-3 paralela a la vista de planta de AD y proyecte a la vista 3 para obtener la longitud verdadera y la pendiente de la línea AD. El rumbo de AD se mide en la vista de planta.

Resp. L. V. de AB: 239', pendiente de AD = 17°, rumbo de AD = S 82° O

26. Dado: Dos líneas de alcantarillado AB y CD convergen en una boca de inspección B, como se muestra en la Fig. 2-53. El punto A está 35' al norte, 10' al este y 30' por encima de B. El punto C está localizado 20' al norte, 60' al oeste y 15' por encima de B. Escala: 1" = 40'.

Problema: Una nueva línea de alcantarillado debe localizarse sobre el plano ABC y a partir del punto D que está localizado 30' exactamente al oeste de A. Usando dos vistas únicamente, localice el punto D en la vista frontal. Usando cuantas vistas sean necesarias, determine la longitud de cada una de las líneas de alcantarillado que convergen en B. ¿Cuál es la pendiente del plano?

Solución:

Localice el plano ABC en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Localice el punto D en la vista de planta y trace la línea DB en esta vista. Proyecte la intersección de las líneas DB y AC a partir de la vista de planta, sobre la vista de elevación frontal. A partir del punto B, en la vista frontal, trace una línea que pase por el punto de intersección proyectado y prolónguela hasta que se encuentre con la proyección de D, procedente de la vista de planta. Este nuevo punto de intersección establecerá el punto D en la vista frontal. Muestre la longitud verdadera de una línea de nivel situada sobre este plano. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 que represente el plano como un filo. La pendiente del plano se mide en esta vista. Dibuje una vista inclinada 2 que muestre el plano en su verdadero tamaño. Las longitudes verdaderas de todas las líneas de alcantarillado se miden en esta vista.

Resp. L. V.: AB = 47'—0", CB = 64'—6", DB = 49'—0", pendiente = 40°

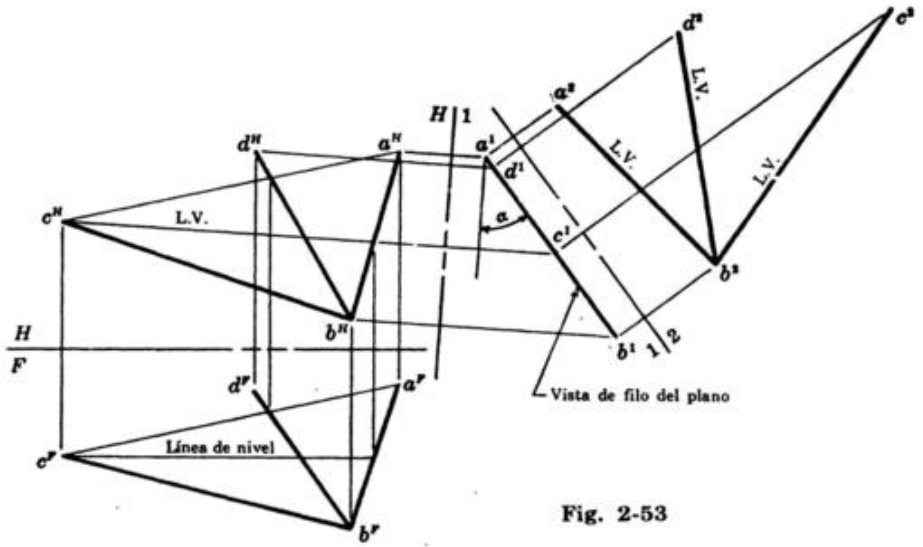


Fig. 2-53

27. Dado: Desde un faro situado a una altura de 250′ sobre el nivel del mar es avistado un submarino en una dirección tal, que su rumbo es N 45° O, medido desde el sitio ocupado por el observador, y su ángulo de depresión es de 20°30′. Cinco minutos más tarde el submarino está situado con respecto al faro sobre una línea con rumbo N 12° E y un ángulo de depresión de 15°15′. Escala: 1″ = 400′.

Problema: ¿A qué distancia del faro estaba la nave en cada una de las dos veces en que fue avistada? ¿Qué distancia recorrió el submarino en los cinco minutos? ¿Cuál fue el rumbo seguido por el submarino y cuál fue su velocidad, suponiendo que el rumbo y la velocidad fueron constantes? (1 nudo = 6080′/hora)

Solución:

Represente el faro por medio del punto *A*, como se muestra en la Fig. 2-54. A partir de *A* trace dos líneas de longitud indefinida, con los rumbos dados. Coloque una línea de pliegue *H*-1 paralela a la vista de planta de la primera línea de vista que parte del faro. La vista de elevación auxiliar 1 establecerá la localización de la nave, cuando fue avistada por primera vez. Proyecte el punto *B*, que representa la nave, a la vista de planta. Localice

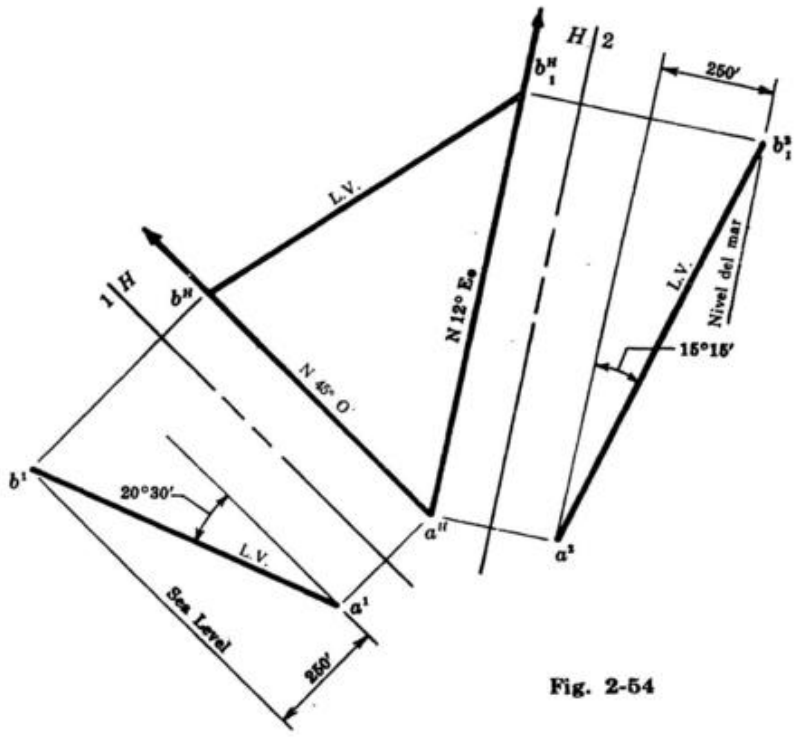


Fig. 2-54

la línea de pliegue H-2 paralela a la vista de planta de la segunda línea de vista que parte del faro. La vista de elevación auxiliar 2 determinará la distancia del faro a la nave, la segunda vez que ésta fue avistada. Proyecte B_1, que representa la localización de la nave en este segundo caso, a la vista de planta. Una con una línea la primera y la segunda posición de la nave, en la vista de planta. Esta línea determinará el rumbo seguido por el submarino. Despreciando la curvatura de la tierra, esta línea mostrará también la distancia que el submarino ha recorrido en los cinco minutos. Halle la velocidad por medio de cálculos matemáticos.

Resp. Distancia AB = 710', distancia AB_1 = 940', distancia recorrida por el submarino = 775', rumbo N 57°30' E, velocidad = 1,5 nudos (aprox.)

28. Dado: Un lanzador de cohetes tiene su rumbo exactamente hacia el oeste, su longitud es de 30' y su pendiente de 30°. El lanzador está soportado en su punto medio por dos puntales. Los puntales son perpendiculares al lanzador y perpendiculares entre sí y su longitud es tal, que sus extremos libres descansan sobre la tierra. Ver Fig. 2-55. Escala: 1" = 20'.

Problema: ¿Cuál es la longitud real, la pendiente y el rumbo de estos puntales?

Solución:

Dibuje la vista de elevación frontal y una parte de la vista de planta. Dibuje una vista inclinada 1 que muestre los puntales en su verdadera longitud. Localice los puntos Y y Z en la vista de planta. Dibuje una vista de elevación auxiliar que muestre la longitud verdadera de uno de los puntales. La pendiente se puede medir en esta vista. Ambos puntales tendrán la misma pendiente. Sus rumbos se miden en la vista de planta.

Resp. Puntal XY: L.V. = 12'—3½"
Pendiente = 38°
Rumbo = S 26° E
Puntal XZ: L.V. = 12'—3½"
Pendiente = 38°
Rumbo = N 26° E

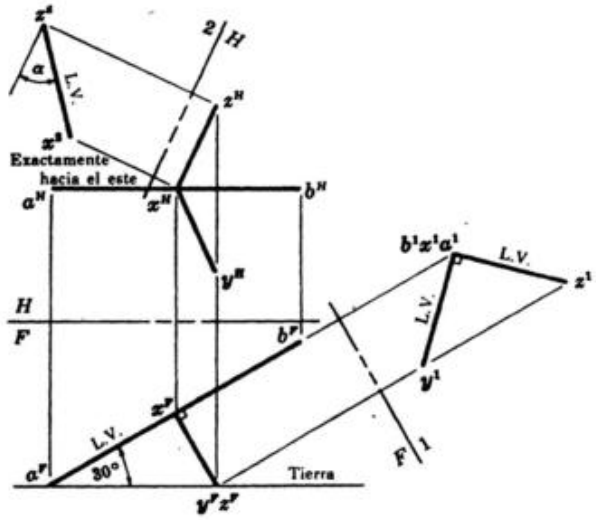


Fig. 2-55

Problemas propuestos

29. Una barra de refuerzo horizontal tiene 12' de longitud y un rumbo N 60° E. Se hace una unión en el punto medio de esta barra. Localice este punto de unión en las tres vistas principales. ¿La unión estará en el punto medio de la barra en todas las vistas? Escala: ¼" = 1'—0".

Resp. Sí, excepto cuando la barra aparece como un punto

30. La vía férrea inclinada situada sobre la cumbre del monte Washington tiene 660' de longitud. La elevación en la cumbre es de 1250' sobre el nivel del mar. La pendiente es de 60°. Si hay cinco pórticos estructurales en "A" localizados a intervalos iguales a lo largo de la vía inclinada, ¿cuál será la elevación de la unión del soporte colocado en la mitad de la vía? Localice las uniones de los pórticos en los tres planos principales. Escala: 1" = 100'.

Resp. Elevación = 964'

31. Un tramo de una carretera recta tiene 155' de longitud, un rumbo S 60° O y un declive descendente del 10%. Muestre la línea media del tramo de carretera en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Determine la diferencia de elevación entre los dos extremos del tramo de carretera. Escala: 1" = 50'.

Resp. 15'—6"

32. El trípode de un teodolito de topógrafo está colocado sobre una carretera. La pata AB tiene 6' de longitud y una pendiente de 45°. La pata AC tiene 5'—3" de longitud. La pata AD tiene una pendiente de 60°. En la vista de planta las patas están igualmente espaciadas y el rumbo de una de ellas es exactamente hacia el sur. Determine la pendiente de la pata AC. ¿Qué longitud tiene la pata AD? Escala: ½" = 1'—0".

Resp. Pendiente de AC = 54°, L. V. de AD = 4'—11"

33. En cada uno de los problemas mostrados en la Fig. 2-56 el estudiante debe determinar la longitud verdadera y la pendiente de la línea *AB*. Haga las medidas aproximando hasta el dieciseisavo de pulgada. Verifique las longitudes verdaderas por medio de cálculos matemáticos, usando el método explicado en el Art. 2.3.1-*A*.

Resp. 1. L.V. = $2\frac{3}{8}$", pendiente = 13°
2. L.V. = $2\frac{5}{8}$", pendiente = 35°
3. L.V. = $1\frac{15}{16}$", pendiente = 31°30′
4. L.V. = $2\frac{1}{8}$", pendiente = 35°30′
5. L.V. = $3\frac{5}{16}$", pendiente = 22°
6. L.V. = $2\frac{1}{4}$", pendiente = 26°30′
7. L.V. = 2′—2", pendiente = 43°30′
8. L.V. = $2\frac{1}{2}$", pendiente = 22°
9. L.V. = $2\frac{7}{16}$", pendiente = 50°30′

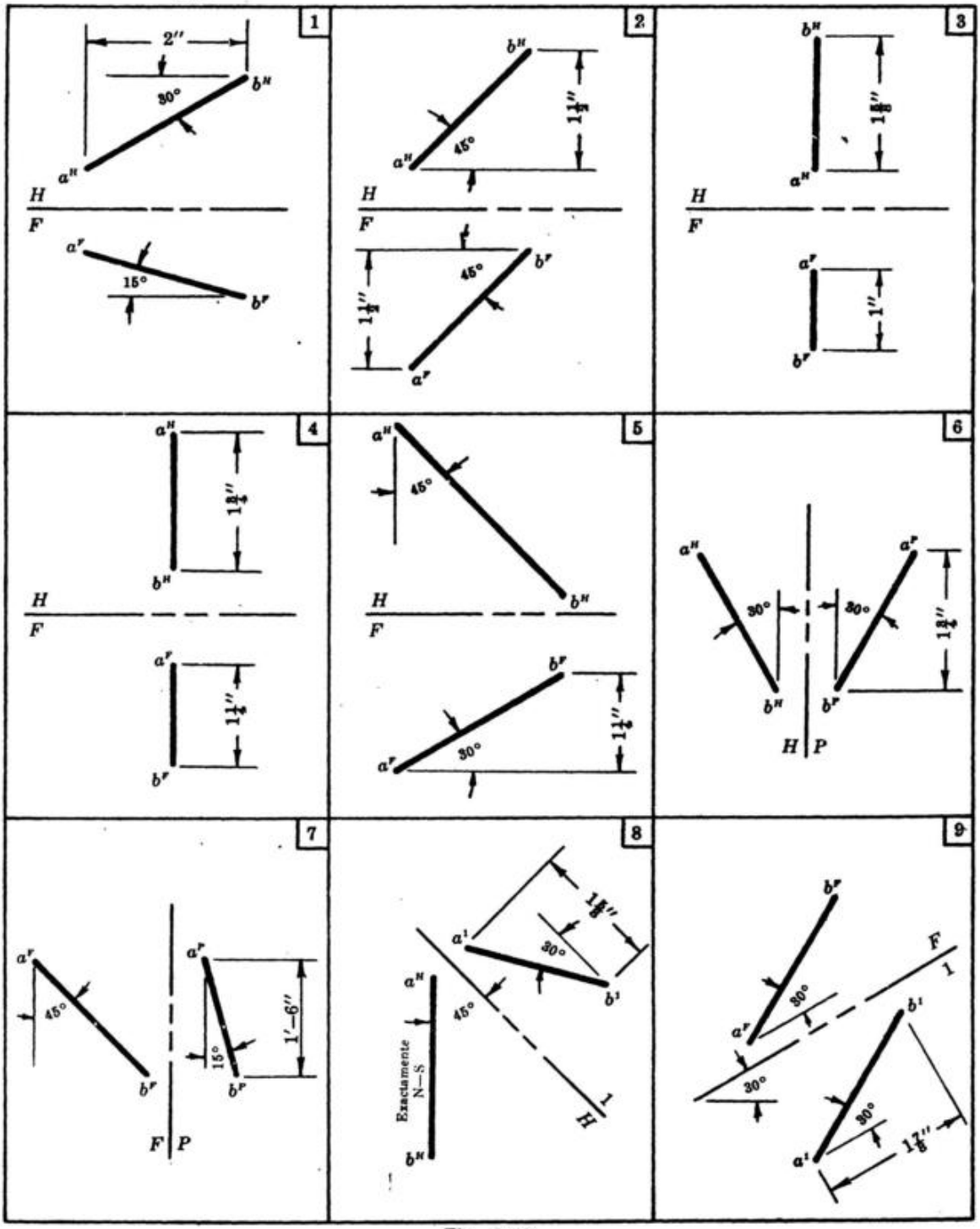


Fig. 2-56

34. El sistema de transporte de una línea ensambladora empieza en el segundo piso de una fábrica. El punto donde comienza el transportador está localizado 24' al oeste, 8' al norte y 16' por encima del otro extremo del transportador. Si la distancia inclinada, medida desde el punto más alto del segundo piso hasta el cielo raso del primer piso, mide 11'—3" y el transportador parte de un punto situado 3' por encima del punto más alto del segundo piso, ¿cuál es la longitud verdadera, la pendiente y el rumbo del transportador? ¿Qué longitud del transportador sobresaldrá por encima del segundo piso y qué longitud por debajo del cielo raso del primer piso?

Resp. L.V. = 30', pendiente = 32°, rumbo = N 71°30' O, por encima = 5'—8", por debajo = 13'—0"

35. En cada uno de los siguientes problemas muestre la línea en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Determine la diferencia de elevación entre los dos extremos de la línea, por métodos gráficos. Haga las medidas con aproximación hasta la pulgada.

Línea	Rumbo	Pendiente	L.V. h	Escala	Respuesta
(1) *AB*	N 30° O a partir de *A*	20° bajando	32'–6"	1" = 10'	11'–1"
(2) *CD*	N 15° E a partir de *C*	50° subiendo	10'–6"	$\frac{1}{4}$" = 1'–0"	8'–1"
(3) *EF*	S 75° O a partir de *E*	100% subiendo	6'–3"	$\frac{1}{2}$" = 1'–0"	4'–5"
(4) *GH*	exactamente al este de *G*	0.5 subiendo	130'	1" = 40'	58'–0"
(5) *JK*	S 35° E a partir de *J*	45% bajando	3'–8"	1" = 1'–0"	1'–6"
(6) *LM*	N 75° O a partir de *L*	$+\frac{7}{10}$	65'–9"	1" = 20'	37'–9"
(7) *NP*	exactamente al sur de *N*	30% subiendo	12'–3"	$\frac{1}{4}$" = 1'–0"	3'–6"
(8) *QR*	N 45° 30' E a partir de *Q*	30°30' bajando	27'	1" = 10'	13'–8"

36. Un plano está determinado así: $A(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, 6\frac{3}{4})$, $B(3, 4, 5)$, $C(4, 2\frac{1}{2}, 5\frac{3}{4})$. Escala: $\frac{1}{4}$" = 1'—0". Determine el diámetro del círculo que se puede circunscribir al plano limitado por *ABC*. ¿Cuál es la pendiente del plano?

Resp. Diámetro = 12', pendiente = 56°

37. Dos líneas que se cortan determinan el plano *ABCD*. El punto *B* está localizado 50' al este, 70' al norte y 20' por debajo del punto *A*. El punto *C* está localizado 10' al oeste, 60' al norte y 30' por debajo de *A*. El punto *D* está localizado 40' al este y 30' al norte de *A*. Escala: 1" = 20'. Muestre el tamaño verdadero del plano limitado por *ABCD*. Determine la pendiente del plano. *Resp.* Pendiente = 27°30'

38. La vista inclinada 2 en la Fig. 2-57 muestra un círculo de 2" de diámetro en su forma y tamaño verdaderos. Escala: 12" = 1'—0". Proyecte el círculo a la vista de elevación auxiliar, a la vista de planta y a la vista de elevación frontal. Determine la pendiente del plano.
Resp. Pendiente = 30°

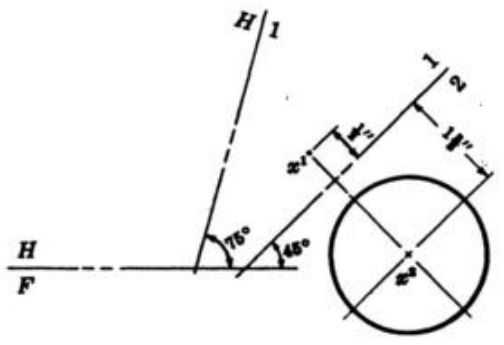


Fig. 2-57

En cada uno de los siguientes problemas determine la vista de filo, la pendiente y el tamaño verdadero del plano:

39. Plano *ABC*. El punto *B* está 25' al este y a la misma elevación de *A*. El punto *C* está 20' al este, 20' al norte y 10' por encima de *A*. Escala: 1" = 10'.
Resp. Pendiente = 27°

40. Plano *DEF*. El punto *E* está 20' al este, 6' al norte y 3' por encima de *D*. El punto *F* está 2' al oeste, 6' al norte y 4' por debajo de *D*. Escala: $\frac{1}{8}$" = 1'—0". *Resp.* Pendiente = 33°

41. Plano *GHJ*. El punto *G* está 6' exactamente al sur y 6' por encima de *H*. El punto *J* está 3' al norte, 4' al oeste y 10' por debajo de *G*. Escala: $\frac{1}{4}$" = 1'—0". *Resp.* Pendiente = 64°

42. Plano *KLM*. El punto *K* está 20' exactamente al norte y 35' por encima de *L*. El punto *M* está 40' exactamente al norte y 10' por debajo de *L*. Escala: 1" = 20'. *Resp.* Pendiente = 90°

43. Plano *NOP*. El punto *N* está 70′ al oeste, 45′ al norte y 30′ por encima de *O*. El punto *P* está 15′ al oeste, 20′ al norte y 25′ por debajo de *O*. Escala: 1″ = 40′. *Resp.* Pendiente = 74°30′

44. Plano *QRS*. El punto *R* está 15′ al este, 20′ al sur y 30′ por encima de *Q*. El punto *S* está 30′ al este, 15′ al norte y 10′ por encima de *Q*. Escala: 1″ = 10′. *Resp.* Pendiente = 50°

45. Plano *TUV*. El punto *U* está 3′—6″ exactamente al sur y 4′—3″ por encima de *T*. El punto *V* está 4′—9″ al este, 2′—3″ al norte y a la misma elevación de *T*. Escala: $\frac{1}{2}$″ = 1′—0″. *Resp.* Pendiente = 51°30′

46. Plano *XYZ*. El punto *Y* está 2′—9″ exactamente al este y a la misma elevación de *X*. El punto *Z* está 3′—6″ exactamente al este y 3′ por debajo de *X*. Escala: 1″ = 1′—0″. *Resp.* Pendiente = 90°

En los siguientes problemas muestre el tamaño verdadero del plano *ABC*. También determine la pendiente del plano: (Ver en el Art. 1.7 la presentación de problemas por medio de coordenadas.)

47. $A(1, 1, 3)$, $B(1\frac{1}{2}, 2, 4\frac{1}{2})$, $C(3, 1, 3\frac{1}{2})$. *Resp.* Pendiente = 37°

48. $A(1, 2, 3\frac{1}{2})$, $B(2, 1, 4\frac{1}{2})$, $C(3, 2\frac{1}{2}, 4)$. *Resp.* Pendiente = 60°

49. $A(1, \frac{1}{2}, 4)$, $B(1, 2, 3)$, $C(2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$. *Resp.* Pendiente = 62°

50. $A(7, 2\frac{1}{4}, 3)$, $B(6, 1, 4)$, $C(5, 2, 4\frac{1}{4})$. *Resp.* Pendiente = 73°

51. $A(6\frac{1}{2}, 2, 4)$, $B(7, 1\frac{1}{2}, 5)$, $C(5\frac{1}{2}, 3, 4)$. *Resp.* Pendiente = 45°

52. Determine el tamaño verdadero y la pendiente del plano *ABCD*. La línea *AD* es paralela a *BC*. Escala: $\frac{1}{4}$″ = 1′—0″. Ver Fig. 2-58. *Resp.* Pendiente = 42°

53. El techo a cuatro aguas de un galpón contiguo a un establo, tiene 12′ de largo por 8′ de ancho. El techo comienza en el establo y se prolonga 8′—6″ a lo largo del caballete. Los dos cabrios de las esquinas tienen un ángulo de pendiente de 45°. Escala: $\frac{1}{4}$″ = 1′—0″. ¿Cuál es la longitud verdadera de los cabrios de las esquinas? ¿Qué altura tendrá el caballete del techo sobre el plano del alero? Muestre la vista de planta y la vista de elevación frontal del techo. *Resp.* L.V. = 7′—5$\frac{1}{2}$″, altura = 5′—3″

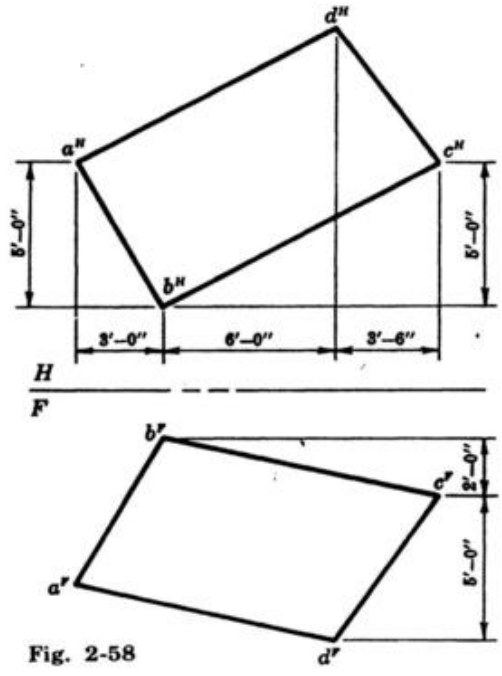


Fig. 2-58

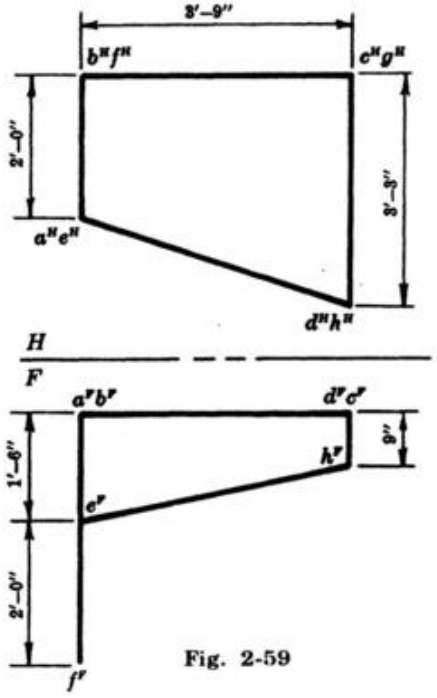


Fig. 2-59

54. La Fig. 2-59 muestra la vista de planta y una parte de la vista frontal de un tubo de ajuste metálico. La abertura del fondo *EFGH* es un plano. Complete la vista frontal. Escala: $\frac{1}{2}$″ = 1′—0″. Determine el tamaño verdadero y la pendiente del plano *EFGH*. *Resp.* Pendiente = 45°

55. La línea *AB* es un poste vertical de 8′ de altura que está sostenido en su posición por tres vientos de alambre localizados así: *AC* tiene una longitud de 10′, una pendiente de 45° y un rumbo N 60° O. El viento *AD* tiene 8′ de longitud, un rumbo N 20° E y un ángulo de 30° con el poste. El viento que parte de *E* está asegurado al poste

en un punto situado 2' por debajo del extremo superior de éste y se dirige exactamente hacia el sur, formando un ángulo de 30° con el poste. Si el punto E está a una elevación de 6" por encima de B, cuál es la longitud real del alambre que parte de E. Escala: $\frac{1}{4}$" = 1'—0". Localice los tres vientos en la vista frontal y en la vista de planta.

Resp. L.V. = 6'—3$\frac{1}{2}$"

56. Las vistas de elevación frontal y de perfil de la armadura de un puente se muestran en la Fig. 2-60. Escala: $\frac{1}{8}$" = 1'—0". ¿Cuáles son las longitudes verdaderas y las pendientes de las diagonales AB y CD?

Resp. *AB:* L.V. = 27'—0", pendiente = 26°30'
CD: L.V. = 32'—0", pendiente = 21°45"

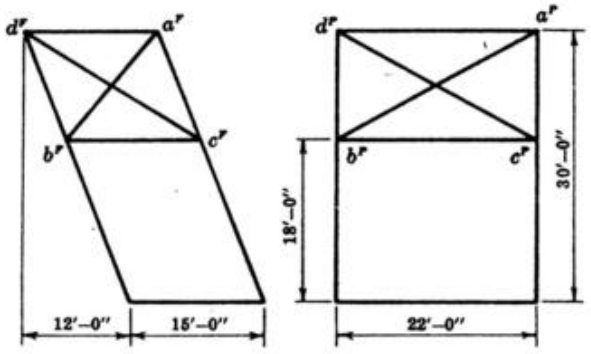


Fig. 2-60

57. Una línea de alcantarillado que une cuatro bocas de inspección se localiza así: La línea que va de la boca A a la boca B tiene un rumbo N 45° E, una longitud de 120' y una pendiente descendente de 10°. De la boca B a la boca C la línea tiene un rumbo directamente hacia el este, una longitud de 100' y una pendiente descendente de 15°. De la boca C a la boca D la línea tiene un rumbo S 30° E, una longitud de 140' y una pendiente descendente de 18°. Escala 1" = 40'. Si la línea de alcantarillado estuviera uniendo la boca A con la boca D directamente, ¿cuál sería su verdadera longitud, su pendiente y su rumbo?

Resp. L.V. = 264', pendiente = —20°, rumbo = S 82°30' E

58. El asta de una bandera DE, mide 10'. Tres vientos de alambre se aseguran al asta en un punto situado 8" por debajo del extremo superior de ésta y se fijan a diferentes niveles, como se muestra en la Fig. 2-61. Escala: $\frac{1}{4}$" = 1'—0". ¿Cuál es la longitud verdadera, la pendiente y el rumbo de cada viento?

Resp.

Línea	Longitud verdadera	Pendiente	Rumbo
AD	11'—4"	55°	N 53° O
BD	11'—10"	44°30'	N 45° E
CD	9'—11"	47°	S 17° O

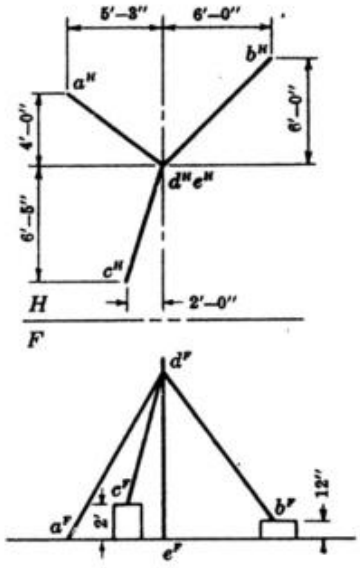


Fig. 2-61

59. Dos tubos, AB y CD, se cortan en D como se muestra en la Fig. 2-62. En ambos tubos la caída de pendiente es hacia D y el tubo que parte de A tiene una pendiente de 45°. Si el punto C está 10' más bajo que el punto A, ¿cuál es la longitud verdadera y la pendiente de CD? ¿Cuál es la longitud verdadera del tubo AB? Muestre ambos tubos en la vista de elevación frontal. Escala: 1" = 50'.

Resp. L.V. de CD = 142' pendiente de CD = 39°
L.V. de AB = 198'

60. Tres miembros estructurales AD, BD y CD están fijos a una pared vertical. B está 8' al este y 6' por debajo de A. El punto C está 14' exactamente hacia el este y 5' por encima de A. El punto D está 6' al este, 5' al sur y 4' por encima de A. Escala: $\frac{1}{4}$" = 1'—0". Determine el ángulo que hace cada miembro con la pared. ¿Cuál es la longitud real de cada miembro?

Resp. *AD:* L.V. = 8'—9$\frac{1}{2}$", ángulo que hace con la pared = 35°30'
BD: L.V. = 11'—5", ángulo que hace con la pared = 26°45'
CD: L.V. = 9'—6", ángulo que hace con la pared = 32°

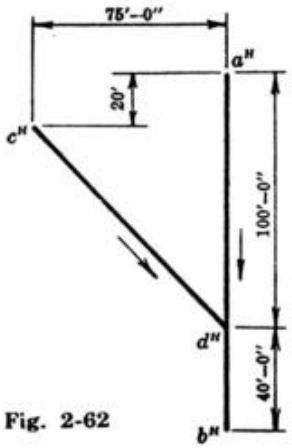


Fig. 2-62

61. La Fig. 2-63 muestra la vista de planta y la vista de elevación frontal del marco de soporte de un ascensor de construcción. La altura del marco es 30' y tiene cuatro vientos de alambre fijados como se muestra en la figura. Escala: 1" = 20'. ¿Cuáles son las longitudes verdaderas, las pendientes y los rumbos de los alambres A y C? ¿Cuáles son las longitudes verdaderas y las pendientes de los alambres B y D? ¿Qué ángulos hacen los alambres B y D con el marco al cual están fijados?

Resp.

Línea	L. V.	Pendiente	Rumbo	Angulo con el soporte
A	36'—6"	41°30'	N 42° O	
B	38'—0"	45°		45°
C	44'—0"	28°30'	N 67°30' E	
D	39'—6"	37°		53°

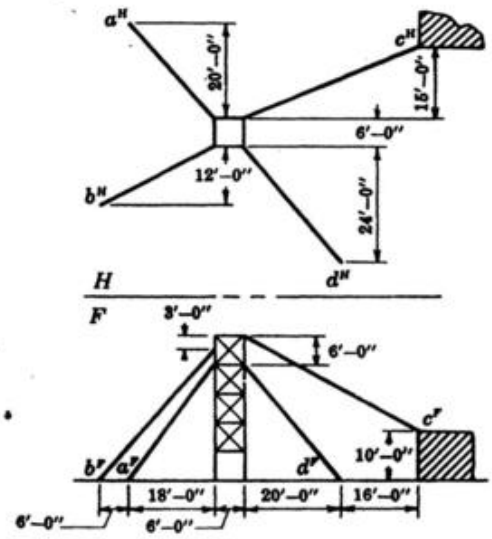


Fig. 2-63

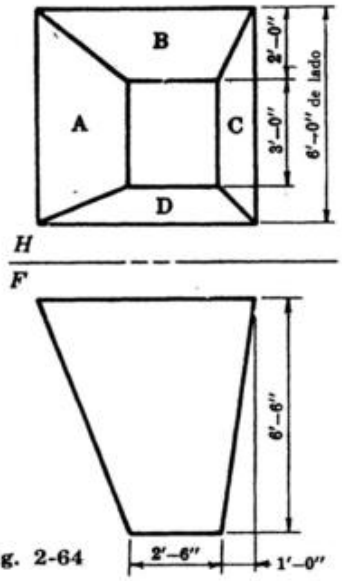


Fig. 2-64

62. La Fig. 2-64 muestra un adaptador metálico de un sistema de escape de gases. Escala: $\frac{3}{8}$" = 1'—0". Muestre los tamaños verdaderos de los planos A, B, C y D. Si el interior del conducto debe tener un revestimiento protector de resina epóxica, ¿cuántos pies cuadrados de metal tendrán revestimiento? (Desprecie el espesor del metal.)

Resp. 119 pies^2

63. Una línea de alcantarillado que corre bajo "Side Street" y tiene una pendiente descendente de —15% empata con otra línea de alcantarillado que corre bajo "Main Street" con una pendiente descendente de —30%. Ver Fig. 2-65. ¿Cuál es la amplitud verdadera del ángulo formado por las dos líneas de alcantarillado? Si una línea de alcantarillado con pendiente de —25% que corre bajo "Cross Street" empata con la línea de alcantarillado de "Main Street", ¿qué ángulo formarán estas dos líneas?

Resp. Angulo entre Side St. y Main St. = 137°
Angulo entre Cross St. y Main St. = 94°

64. Una placa metálica plana $ABCD$ se localiza así: B está 3' al oeste, 6' al norte y 6' por debajo de A; C está 8' al este, 4' al norte y 4' por encima de A; D está 3' al este y 7' al norte de A. Escala: $\frac{1}{4}$" = 1'—0". Localice el punto D en la vista frontal. Determine el tamaño verdadero y la pendiente del plano. Un punto X situado sobre el plano está localizado 5' por encima de B y a 8' de C. Si X es el centro de un círculo, determine el diámetro del mayor agujero circular que se puede abrir en la placa, teniendo en cuenta que la distancia desde el borde del agujero hasta el contorno del plano debe medir por lo menos 6". Muestre el agujero en todas las vistas.

Resp. Pendiente = 45°, diámetro = 5'—6"

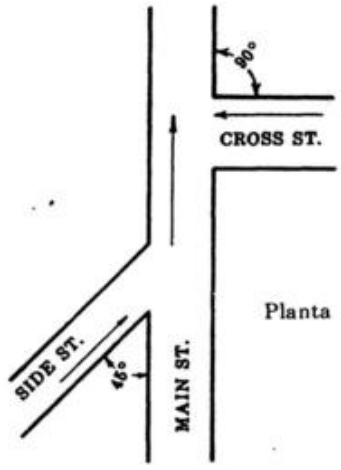


Fig. 2-65

65. La Fig. 2-66 muestra las vistas de elevación frontal y de perfil del tren de aterrizaje de un avión. Escala: $\frac{1}{2}'' = 1'-0''$. Determine la longitud verdadera de los soportes AB, AC y AD del tren de aterrizaje.

Resp. L. V. de $AB = 7'-5''$, L. V. de $AC = 5'-4''$, L. V. de $AD = 5'-9\frac{1}{2}''$

66. Un avión situado en A, a una altura de 1500′ sigue un rumbo S 45° O y en su velocímetro se lee una velocidad de 120 millas por hora. El avión está ganando altura a razón de 2100′ por minuto. Desde A es avistado un barco según un rumbo S 10° E y un ángulo de depresión de 40°. Veinte segundos después el barco es avistado según un rumbo N 60° E y un ángulo de depresión de 45°. Escala: 1″ = 1000′. Suponiendo que el curso del barco es constante, determine el rumbo seguido por éste y su velocidad, expresada en nudos. (1 nudo = 6080′/hora)

Resp. Rumbo = N 63° O, velocidad = 28 nudos (aprox.)

67. Un camión-grúa está construido como se muestra en la Fig. 2-67. A está localizado en el punto medio de ED. AB tiene una pendiente de 60° y un rumbo N 15° E. Escala: $\frac{1}{4}'' = 1'-0''$. Determine la longitud real de AB. ¿Cuál es la longitud verdadera, la pendiente y el rumbo del miembro estructural DG? Cuando el miembro principal de la estructura ED aparece como un punto, ¿qué ángulo forma cada uno de los pares de puntales estructurales?

Resp. L.V. de $AB = 3'-5''$, L.V. de $DG = 8'-0''$, pendiente de $DG = 48°$, rumbo de DG = N 41° O, ángulo $BAC = 60°30'$, ángulo $FDG = 98°$

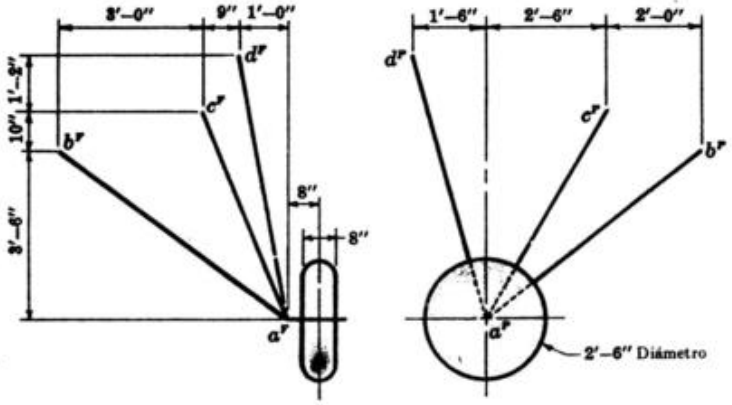


Fig. 2-66

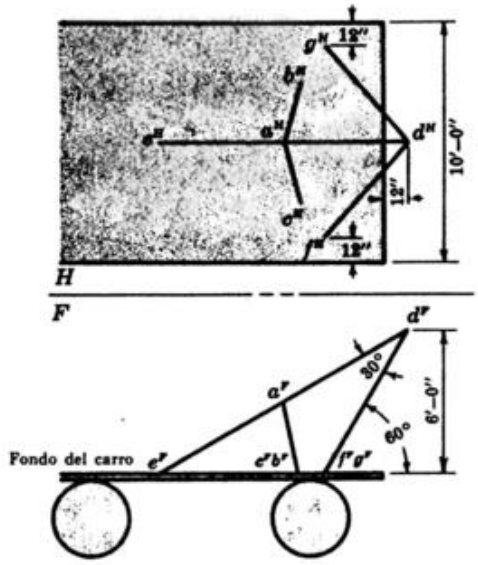


Fig. 2-67

Capítulo 3

Líneas cruzadas

TEOREMAS

Un teorema es un enunciado verdadero que puede ser demostrado.

El siguiente es un grupo de teoremas que el estudiante de geometría descriptiva debe estar capacitado para reconocer como verdades patentes. Esto puede lograrse únicamente por medio de un estudio y un análisis hechos cuidadosamente. Las verdades expresadas en estos teoremas serán de mucha ayuda en la selección de los métodos utilizados para la resolución de los problemas que se incluyen en los próximos capítulos.

LINEAS Y PLANOS

(*1*) Dos líneas perpendiculares a un mismo plano son paralelas.

(*2*) Dos líneas trazadas sobre un mismo plano son paralelas o se cortan.

(*3*) Dos líneas paralelas en el espacio, aparecerán siempre paralelas o como dos puntos, en todas las vistas ortogonales.

(*4*) Dos líneas que aparecen paralelas en una vista no son necesariamente paralelas en el espacio.

(*5*) Dos líneas perpendiculares entre sí aparecerán perpendiculares en cualquier proyección que muestre la vista normal de una o de ambas líneas. (Estas líneas no se cortan necesariamente.)

(*6*) Una línea no perteneciente a un plano, que sea paralela a una línea cualquiera trazada en este plano, será también paralela al plano.

(*7*) Una línea perpendicular a un plano es perpendicular a todas las líneas trazadas en este plano. Una vista de punta de esta línea muestra la longitud verdadera de todas las líneas trazadas en el plano.

(*8*) Si una línea es perpendicular a uno cualquiera de dos planos perpendiculares entre sí, es paralela al otro plano.

(*9*) Si una línea es paralela a dos planos que se intersectan es paralela a la línea de intersección de los planos.

(*10*) Si una línea es perpendicular a un plano, todos los planos que contengan esta línea también serán perpendiculares al plano mencionado.

(*11*) Por un punto situado en un plano puede pasar un infinito número de líneas. Sin embargo, solamente una de estas líneas puede tener la misma pendiente del plano, y esta línea debe ser perpendicular a una línea de nivel situada en el plano.

(*12*) Ninguna línea situada en un plano puede tener una pendiente mayor que la pendiente del plano.

(*13*) La proyección de un ángulo de un plano puede mostrar una amplitud mayor o menor que la verdadera.

(*14*) Una vista normal de un plano es una vista de punta de todas las líneas perpendiculares a él.

(*15*) Una vista de filo de un plano es una vista normal de todas las líneas perpendiculares a él.

(*16*) Si dos planos paralelos son cortados por un tercer plano, las líneas de intersección son paralelas.

(*17*) Si un plano es perpendicular a dos planos que se cortan es perpendicular a su línea de intersección.

(*18*) Si dos planos son perpendiculares, una línea trazada sobre uno de ellos, perpendicular a la línea de intersección, es perpendicular al otro plano.

(*19*) El ángulo que hace una línea con un plano es el ángulo que la línea hace con su proyección sobre el plano.

(*20*) Si dos planos son paralelos, cualquier línea trazada en uno de los planos es paralela al otro plano.

LINEAS CRUZADAS

Líneas cruzadas son aquellas que ni se cortan ni son paralelas.

Los fundamentos en que se basa el estudio de las líneas cruzadas son muy importantes y deben ser comprendidos cuidadosamente por los estudiantes de ingeniería y de ciencias. Este capítulo hace ver la conveniencia de estudiar estos principios fundamentales y sus aplicaciones en los distintos campos de trabajo.

Uno de los problemas de ingeniería más comunes es el de determinar la longitud verdadera, la pendiente y el rumbo de la línea más corta que une dos líneas cruzadas. Los problemas relativos a espacios libres entre cables, tubos, tirantes, etc. son casos típicos de los problemas encontrados en la ingeniería.

Otra aplicación de estos fundamentos puede verse en problemas en que se pide el túnel más corto que une otros dos túneles de una mina. Nuevamente la distancia perpendicular será la distancia pedida. Si el túnel de unión que se pide ha de tener un declive determinado se debe seguir un sencillo procedimiento, que se utilizará en todos los problemas similares.

Una aplicación más de los principios expuestos en este capítulo consiste en hallar la conexión más pequeña entre dos líneas de alcantarillado o dos cañerías oblicuas (Ver Fig. 3-1). En este caso, la cañería de conexión más pequeña que es posible obtener probablemente estará relacionada con el uso de tes en ángulo recto, puesto que la distancia más corta entre dos líneas que se cruzan es una tercera línea perpendicular a las dos primeras.

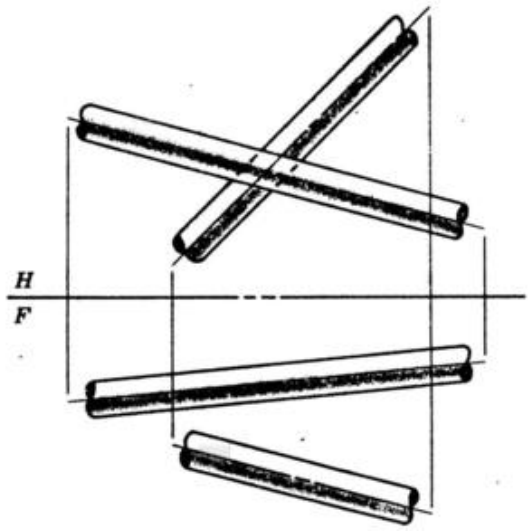


Fig. 3-1. Cañerías cruzadas

3.1 DIBUJAR UN PLANO QUE CONTENGA A UNA LINEA DADA Y SEA PARALELO A OTRA LINEA DADA

Análisis: Un teorema geométrico nos dice que si una línea externa a un plano es paralela a una línea situada en el plano, entonces la línea externa es paralela al plano. Por tanto, por un punto cualquiera situado en una de las líneas dadas se debe trazar una línea que sea paralela a la otra línea dada. Las dos líneas que se cortan ahora determinan un plano que contiene a una línea que es paralela a la línea dada, en el espacio. El plano pedido, representado por las dos líneas que se cortan, debe

mostrarse por lo menos en dos vistas. Debe recordarse que dos líneas que se cortan representan un plano únicamente cuando la intersección se puede proyectar entre vistas relacionadas como un punto común.

Ejemplo: En la Fig. 3-2 hemos dado la vista de planta y la vista de elevación frontal de dos líneas, *AB* y *CD* que ni se intersectan ni son paralelas. Por cualquier punto situado sobre la línea *CD* (en este caso, *Z*), se traza la línea *XY* paralela a la línea *AB*. Este procedimiento se sigue en ambas vistas, determinando de este modo un plano *CDXY*, el cual contiene una línea, *XY*, paralela a la línea *AB* en el espacio.

Esta solución se puede verificar dibujando otra vista que muestre el plano como un filo. En esta vista la línea *AB* aparecerá paralela al plano.

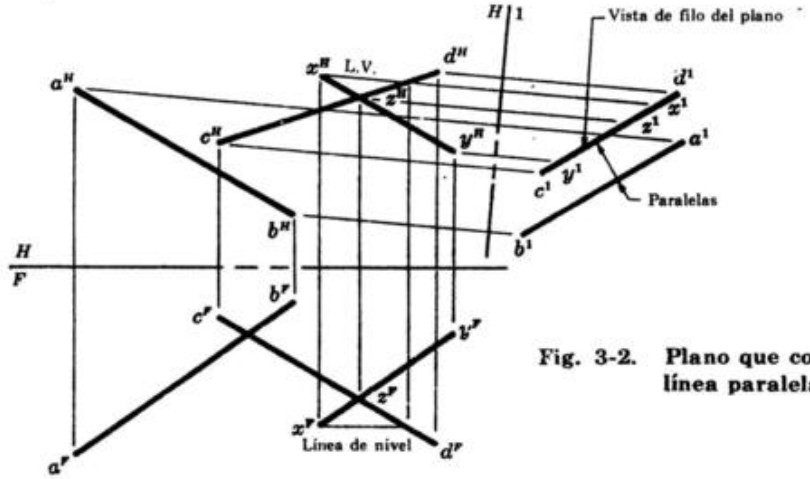


Fig. 3-2. Plano que contiene a una línea paralela a otra línea

3.2 DETERMINAR LA DISTANCIA MAS CORTA ENTRE DOS LINEAS QUE SE CRUZAN

Análisis: (Método lineal) La distancia más corta entre dos líneas que ni se cortan ni son paralelas será la distancia perpendicular a ellas. Esta distancia perpendicular puede ser localizada únicamente en una posición del espacio. En una vista que muestre una de las líneas en su verdadera longitud, la distancia más corta aparecerá perpendicular a esta línea. Además, si una de las líneas aparece como un punto, la distancia más corta será perpendicular a la otra línea. En esta misma vista la distancia más corta estará en su verdadera longitud. Por tanto la resolución del problema consiste en mostrar una de las líneas como un punto y proyectar una perpendicular desde esta vista de punta de la línea sobre la otra línea.

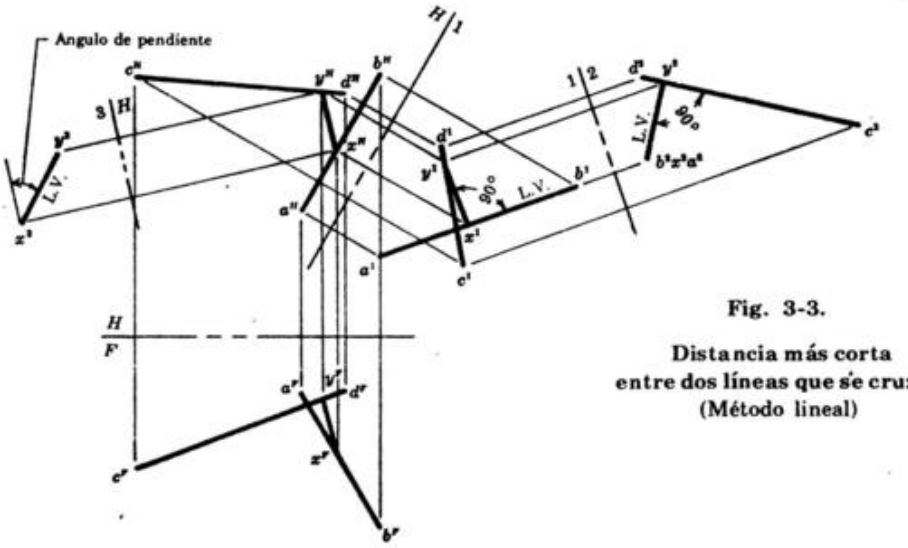


Fig. 3-3.

Distancia más corta entre dos líneas que se cruzan (Método lineal)

Ejemplo: Dos líneas que se cruzan, *AB* y *CD*, se dan en la vista de planta y en la vista de elevación frontal en la Fig. 3-3. Como ambas líneas pueden mostrarse en su longitud verdadera, dibuje una vista de elevación auxiliar en la cual aparezca la longitud verdadera de *AB*. Muestre también la línea *CD* en esta vista. La distancia más corta será perpendicular a la línea *AB*, pero su localización exacta es aún desconocida. Dibuje una vista inclinada que muestre la línea *AB* como un punto. La distancia más corta será la distancia perpendicular de *AB* a la línea *CD*, aun cuando la longitud verdadera de *CD* no aparece en esta vista. Llame *XY* la línea que representa la distancia más corta y proyéctela a la vista 1. Puesto que *XY* está en su verdadera longitud en la vista 2, debe ser paralela a la línea de pliegue 1-2, en la vista 1. La línea *XY* debe ser perpendicular a *AB* en la vista 1, donde *AB* se muestra en su verdadera longitud. De esta manera se puede localizar el punto *X* en la vista 1. Proyecte *XY* a las vistas *H* y *F*.

El rumbo de la línea de distancia más corta se puede medir en la vista de planta. Para determinar la pendiente de la línea de distancia más corta se dibuja una nueva vista de elevación auxiliar que muestre únicamente la línea *XY* en su verdadera longitud. Desde luego, esta distancia en su longitud verdadera se puede verificar con la línea *XY*, medida en la vista inclinada 2.

Análisis: (Método del plano) Por un punto situado sobre una de las líneas dadas pase un plano que tenga una línea paralela a la otra línea dada. Esta segunda línea dada es externa al plano y paralela a él (Ver el Art. 3.1). Todos los puntos situados sobre la segunda línea dada serán equidistantes del nuevo plano establecido. Una vista de elevación que muestre el plano como un filo mostrará, no solamente la longitud verdadera de la distancia perpendicular, sino también su pendiente.

Para determinar la localización exacta de la distancia más corta se debe proyectar una nueva vista que tenga las líneas de mira perpendiculares a la vista de filo del plano. Esta vista mostrará las dos líneas dadas en sus verdaderas longitudes y la distancia perpendicular entre ellas aparecerá como un punto situado sobre la intersección de las líneas.

Ejemplo: La vista de planta y la vista de elevación frontal de las líneas *AB* y *CD* se dan en la Fig. 3-4. Se construye un plano *CDE* que contenga la línea *CD*, y sobre él se traza una línea *DE* paralela a la línea *AB*. Dibuje una vista de elevación auxiliar que muestre el plano como un filo. La línea *AB* será paralela a la vista de filo del plano, en esta vista. La distancia perpendicular medida entre el plano y la línea será la longitud verdadera de la distancia más corta que se pide.

Para determinar la localización exacta de esta distancia más corta proyecte una vista inclinada a partir de la vista de elevación auxiliar para ver las longitudes verdaderas de las líneas *AB* y *CD*. Puesto que la línea de pliegue 1-2 fue colocada paralela a la vista de filo del plano, la vista inclinada mostrará también el tamaño verdadero del plano. La vista de punta de la distancia más corta *XY* se localizará en el punto donde se cortan las dos líneas en sus longitudes verdaderas. Proyecte la línea *XY* a la vista de elevación auxiliar, y de ésta a las demás vistas. Observe que la vista de planta de la línea *XY* será paralela a la línea de pliegue *H*-1, debido a que la longitud verdadera de *XY* se muestra en la vista 1.

La pendiente de la línea de distancia más corta aparecerá en la vista 1, mientras que el rumbo se determinará por su posición en la vista de planta.

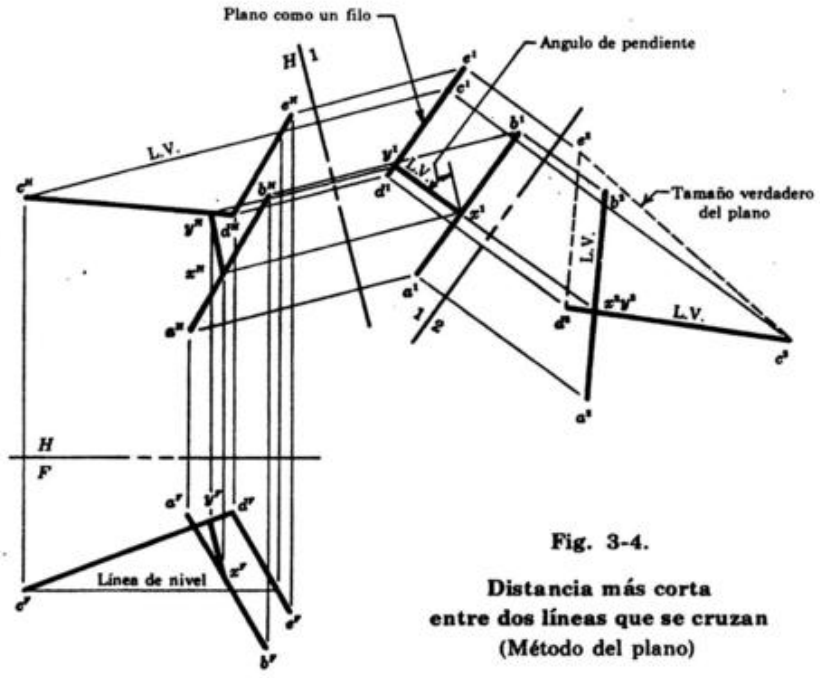


Fig. 3-4.

Distancia más corta entre dos líneas que se cruzan (Método del plano)

3.3 DETERMINAR LA DISTANCIA HORIZONTAL MAS CORTA ENTRE DOS LINEAS QUE SE CRUZAN

En muchas fases de la ingeniería surgen problemas relativos a la localización de la distancia horizontal más corta entre dos líneas que se cruzan, las cuales representan las líneas medias de tubos, túneles, cañerías, tirantes, etc.

Por ejemplo, en ingeniería de minas frecuentemente se considera necesario conectar dos túneles por medio de un pasadizo que no tenga pendiente. A menudo se construyen carrileras entre dos túneles y estas carrileras deben estar perfectamente niveladas.

Análisis: La distancia horizontal más corta entre dos líneas que se cruzan aparecerá en su longitud verdadera cuando el plano que contiene una de las líneas cruzadas, y es paralelo a la otra, aparece como un filo. Aunque la longitud verdadera de la distancia horizontal más corta es conocida, su localización exacta no se puede determinar en la vista de elevación auxiliar. Puesto que la longitud verdadera de la distancia horizontal más corta aparecerá en una vista de elevación, su vista de punta también aparecerá en una vista de elevación que tenga las líneas de mira paralelas a la distancia horizontal más corta. En la intersección de las dos líneas dadas en esta nueva vista aparecerá la distancia horizontal más corta como un punto.

Nota: El método lineal del Art. 3.2 no puede utilizarse para determinar la distancia horizontal más corta, porque en este método la vista que muestra la línea pedida en su verdadera longitud muestra también una línea inclinada como un punto y por tanto esta vista no puede ser una vista de elevación.

Ejemplo: En la Fig. 3-5 se da la vista de planta y la vista de elevación frontal de dos líneas que se cruzan, *AB* y *CD*. Se dibuja el plano *CDE* de modo que contenga a la línea *DE*, la cual es paralela a la línea *AB*. Luego se dibuja una vista de elevación auxiliar que muestre el plano como un filo y la línea *AB* paralela a él. La distancia

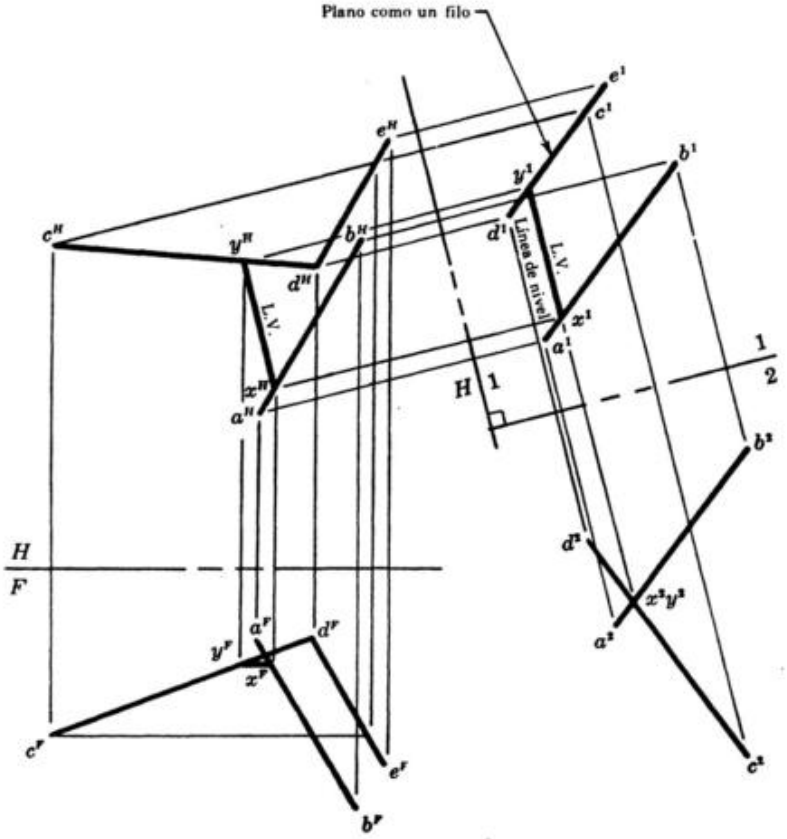


Fig. 3-5. Distancia horizontal más corta entre dos líneas que se cruzan

horizontal más corta es la distancia horizontal entre estas dos líneas, una de las cuales representa la vista de filo de un plano. Esta distancia horizontal será paralela a la línea de pliegue H-1. Para mostrar la vista de punta de la distancia horizontal más corta se debe localizar la línea de pliegue 1-2 perpendicular a la línea de pliegue H-1. La vista de elevación 2 determinará la localización exacta de la línea horizontal en el punto de intersección de las líneas AB y CD. Luego se proyectará la línea horizontal XY a las otras vistas y se observará que esta línea aparece en su verdadera longitud en la vista de planta. En la vista de elevación frontal XY debe ser paralela a la línea de pliegue H-F, puesto que toda línea horizontal es paralela al plano de imagen horizontal.

3.4 DETERMINAR LA LINEA MAS CORTA DE PENDIENTE DADA QUE UNE DOS LINEAS QUE SE CRUZAN

Análisis: Repitiendo lo dicho anteriormente, si se dibuja un plano, de modo que contenga una de las líneas que se cruzan y sea paralelo a la otra, entonces, una vista de elevación auxiliar que muestre el plano como un filo, mostrará la otra línea paralela a él. Puesto que el plano y la línea aparecen paralelos en una vista de elevación, la línea pedida se puede trazar con el ángulo de pendiente especificado. Sin embargo, aunque la dirección de la línea es determinada, su localización exacta no se conoce. La proyección sobre una nueva vista que tenga la línea de pliegue perpendicular a la dirección de la línea más corta de pendiente dada, mostrará la línea pedida como un punto situado en la intersección de las dos líneas que se cruzan.

Nota: El método lineal del Art. 3.2 no puede utilizarse para determinar la línea más corta de pendiente dada puesto que, con el método lineal, la vista que muestra la línea pedida en su verdadera longitud muestra también una línea inclinada como un punto, y por tanto, no puede ser una vista de elevación.

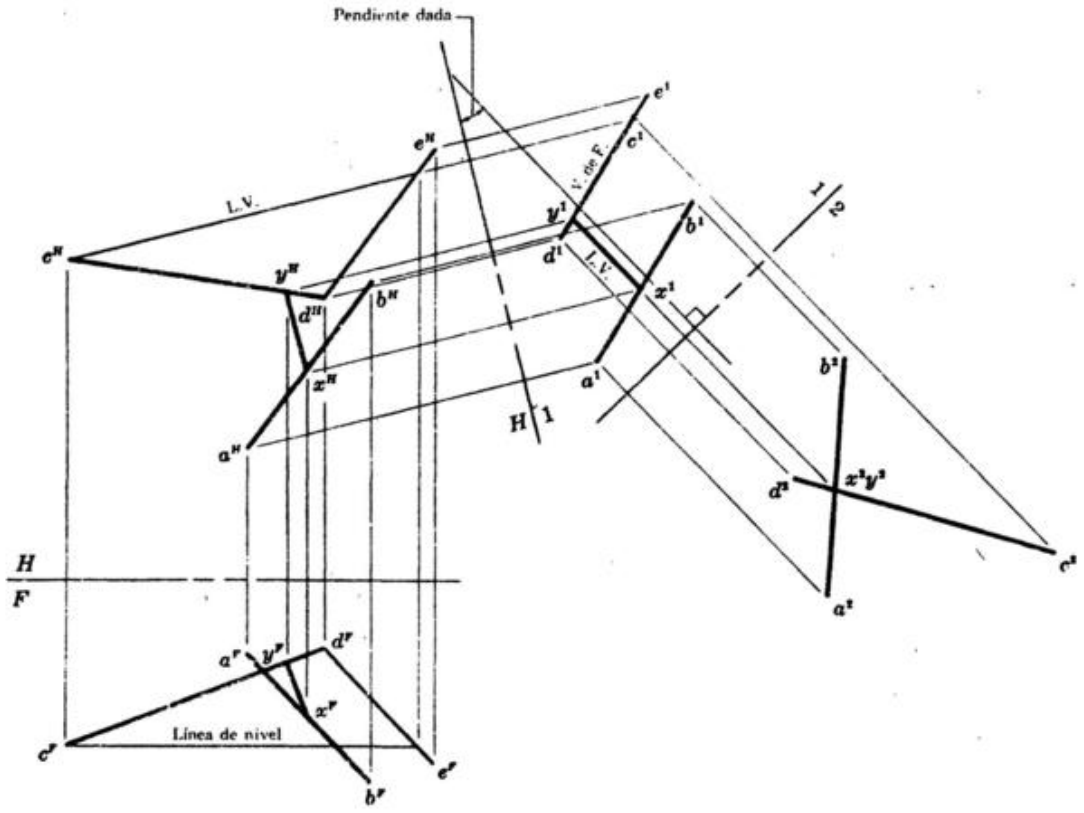


Fig. 3-6. Línea más corta de pendiente dada entre dos líneas que se cruzan

Ejemplo: En la Fig. 3-6 se dan las dos líneas cruzadas *AB* y *CD* en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. El plano *CDE* se dibujó de tal forma que contiene a la línea *DE*, la que a su vez es paralela a la línea *AB*. Enseguida se dibuja una vista de elevación auxiliar que muestre el plano como un filo y la línea *AB* paralela a él. La línea más corta aparecerá en su verdadera longitud en esta vista, cualquiera que sea su pendiente y formará el ángulo de pendiente especificado con la línea de pliegue *H*-1. Para obtener la localización exacta de la línea pedida, trace una línea de pliegue 1-2 perpendicular a la línea (que tiene la pendiente dada), y la intersección de *AB* y *CD* en esta vista mostrará la línea pedida como un punto. Por simple proyección se localizará la línea en las otras vistas.

Problemas resueltos

1. Dado: El punto *B* está localizado 1′—6″ exactamente al norte y 1′ por debajo de *A*. El punto *C* está localizado 1′ al norte, 1′ al oeste y 2′ por debajo de *A*. El punto *D* está 3′ al este, 2′ al norte y a la misma elevación de *A*. Ver Fig. 3-7. Escala: $\frac{3}{8}'' = 1'—0''$.

Problema: Utilizando las dos líneas cruzadas *AB* y *CD*, dibuje un plano que contenga la línea *AB* y además sea paralelo a la línea *CD*. Dibuje una vista de elevación auxiliar para verificar su solución. Determine la pendiente del plano.

Solución:

Tanto en la vista de planta como en la vista de elevación frontal, trace la línea *BE* paralela a la línea *CD*. La línea *CD* es ahora paralela al plano *ABE*. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 para mostrar la línea y el plano paralelos. La pendiente se mide en la vista 1.

Resp. Pendiente = 44° 30′

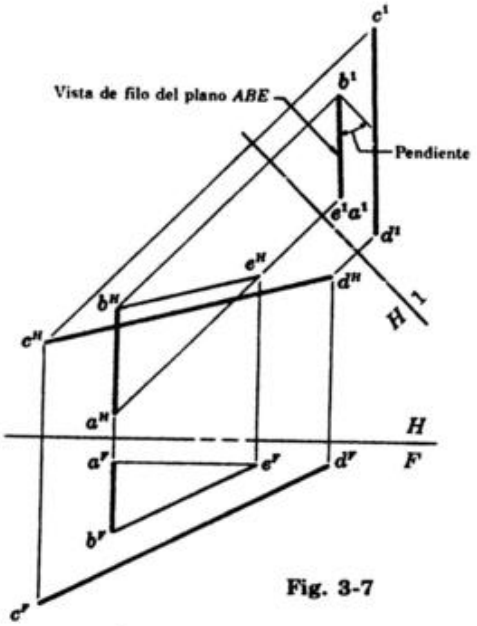


Fig. 3-7

2. Dado: La vista de planta del plano *ABC* y de la línea *XY*. La vista de elevación frontal del plano *ABC* y del punto *X*. La línea *XY* es paralela al plano. Ver la Fig. 3-8.

Problema: Complete la vista frontal de la línea *XY*.

Solución:

Por el punto *B* trace una línea paralela a la línea *XY*, en la vista de planta. Esta línea cortará la línea *AC* en el punto *D*. Proyecte el punto *D* a la vista frontal, y en esta vista únalo con el punto *B*. A partir del punto *Y*, en la vista de planta, proyecte una línea sobre la vista frontal. Desde el punto *X* en la vista frontal, trace una línea paralela a *BD*. El punto de intersección de esta línea con la proyección de *D* procedente de la vista de planta determinará la posición de *Y* en la vista frontal.

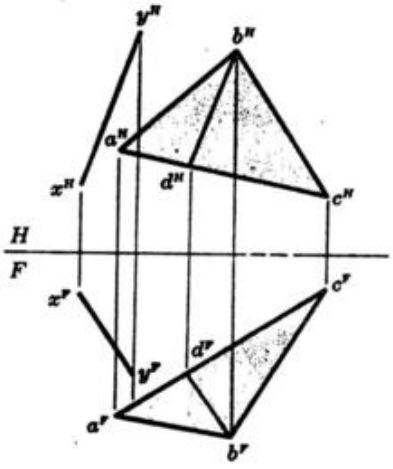


Fig. 3-8

3. Dado: La vista de planta de los planos *ABC* y *DEF*. La vista de elevación frontal del plano *ABC* y del punto *F*. Los planos *ABC* y *DEF* son paralelos. Ver Fig. 3-9.

Problema: Complete la vista de elevación frontal del plano *DEF*.

Solución:

En la vista de planta del plano *ABC* trace a partir del punto *A* una línea paralela a la línea *FE*. Desde el punto *B*, en la vista de planta, trace una línea paralela a *DF*. Proyecte estas nuevas líneas a la vista frontal del plano *ABC*. Por el punto *F*, en la vista frontal, trace una línea paralela a la línea *AG* hasta que corte la proyección de *E* procedente de la vista de planta. A partir del punto *F*, en la vista frontal, trace una línea paralela a la línea *BH* hasta que corte la proyección de *D* procedente de la vista de planta. Una los puntos *D*, *E* y *F* para obtener la vista frontal del plano *DEF* paralela al plano *ABC*.

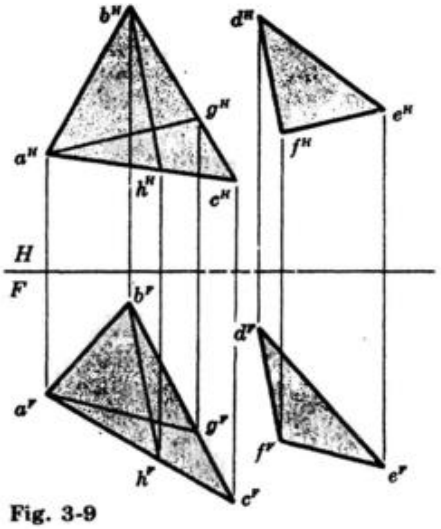


Fig. 3-9

4. Dado: Dos líneas *AB* y *CD*. El punto *B* está localizado 1′—6″ exactamente al norte y 2′ por debajo de *A*. El punto *C* está 2′—6″ al este, 2′ al norte y 1′ por debajo de *A*. El punto *D* está localizado 2′—6″ al este, 6″ al sur y 2′ por debajo de *A*. Ver la Fig. 3-10. Escala: $\frac{1}{2}$″ = 1′—0″.

Problema: Determinar la distancia más corta entre las líneas *AB* y *CD*. ¿Cuál es la pendiente y cuál el rumbo de la distancia más corta?

Solución:

Usando los datos, dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal de las líneas *AB* y *CD*. Se observará que las dos líneas son líneas de perfil paralelas. Una vista de perfil mostrará la distancia más corta como un punto. La distancia más corta será una línea frontal-horizontal. Llame esta línea *XY* y muéstrela en todas las vistas. La longitud verdadera de la distancia más corta aparecerá tanto en la vista de planta como en la vista frontal. *Resp.* L.V. = 2′—6″, pendiente = 0′, rumbo = exact. Este-Oeste

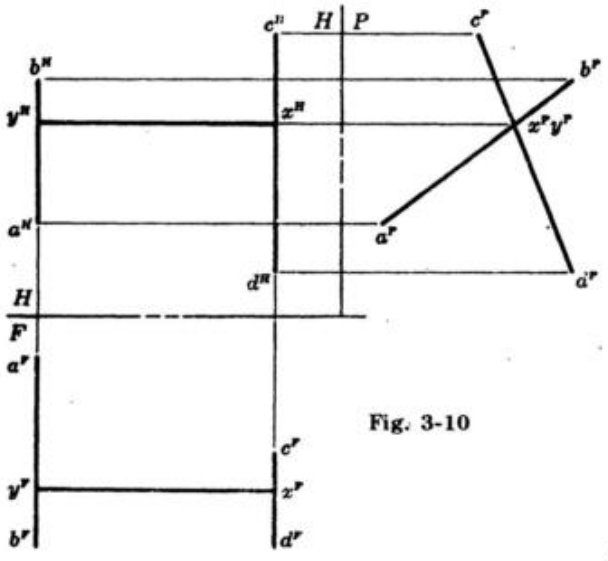


Fig. 3-10

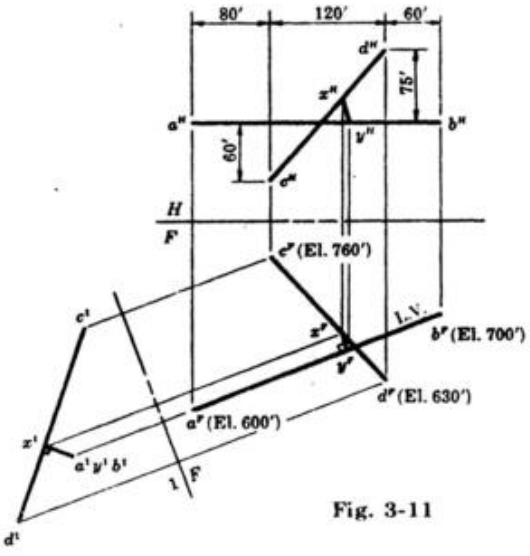


Fig. 3-11

5. Dado: La Fig. 3-11 muestra la vista de planta y la vista de elevación frontal de una línea de energía eléctrica y una línea de teléfono. Escala: 1″ = 200′.

Problema: Determine el espacio libre entre las dos líneas. Determine la distancia de espacio libre por medio de una línea, en todas las vistas. Utilice el método lineal.

Solución:

Puesto que la línea *AB* es una línea frontal, aparecerá en su longitud verdadera en la vista de elevación frontal. Coloque la línea de pliegue *F*-1 perpendicular a la longitud verdadera de *AB*. Proyecte las líneas *AB* y *CD* a la vista inclinada 1. La línea *AB* aparecerá como un punto en esta vista. Desde la vista de punta de *AB* trace una línea perpendicular a la línea *CD*. Esta perpendicular representa el espacio libre real que separa las dos líneas. Proyecte esta línea de espacio libre a la vista frontal y a la vista de planta. Ver el Art. 3.2 y la Fig. 3-2. *Resp.* Espacio libre = 30'

6. Dado: Dos cañerías están representadas por las líneas *AB* y *CD* en la Fig. 3-12. Escala: 1'' = 30'.

Problema: Determine la longitud verdadera, la pendiente y el rumbo de la distancia más corta entre las dos cañerías.

Solución:

Dibuje una vista de elevación auxiliar que muestre la longitud verdadera de *AB*. Dibuje una vista inclinada que muestre la línea *AB* como un punto. Proyecte la línea *CD* a estas dos vistas. La distancia perpendicular desde la vista de punta de *AB* hasta la línea *CD* es la distancia más corta entre las dos cañerías. Puesto que la vista 2 muestra la longitud verdadera de la distancia más corta, la vista 1 mostrará la distancia más corta paralela a la línea de pliegue 1-2. Proyecte la distancia más corta a la vista de planta, en la cual se puede determinar el rumbo. Una vista de elevación auxiliar que tenga la línea de pliegue *H*-3 paralela a la vista de planta de la distancia más corta, mostrará la longitud verdadera y la pendiente de la línea pedida. (Ver el Art. 3.2.) *Resp.* L.V. = 20', pendiente = 57° 30', rumbo = N 6° E

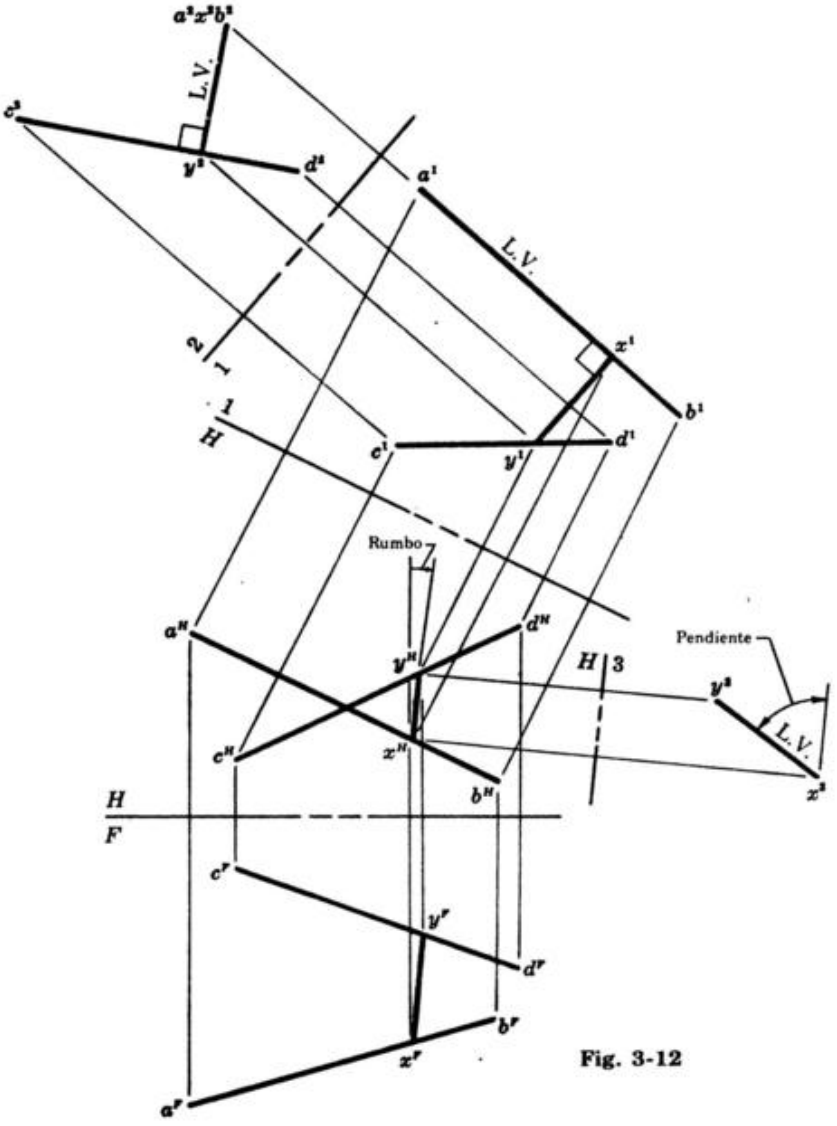


Fig. 3-12

7. **Dado:** Un cubo de 3" de lado. Escala: 3" = 1'—0".

Problema: ¿Cuál será la longitud verdadera y cuál la pendiente de la distancia más corta entre dos diagonales que no se corten, pertenecientes a dos caras adyacentes? Utilice el método lineal. Ver la Fig. 3-13.

Solución:

Dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal del cubo, mostrando dos diagonales que no se corten. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 para mostrar la diagonal horizontal como un punto. En esta vista muestre también la diagonal de la cara vertical del cubo. A partir de la vista de punta de la diagonal *AB* trace una línea perpendicular sobre la otra diagonal. Esta perpendicular representa la longitud verdadera de la distancia más corta entre las dos diagonales. La pendiente de la distancia más corta también puede medirse en la vista de elevación auxiliar 1.

Resp. L.V. = $1\frac{3}{4}$", pendiente = 35°

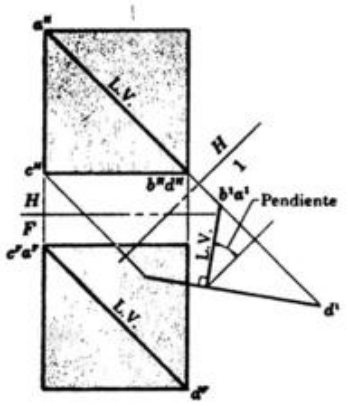


Fig. 3-13

8. **Dado:** El punto *A*, con una elevación de 1550', es la boca de un túnel de una mina, que tiene un rumbo N 60° E sobre un declive descendente del 30%. La boca de un nuevo túnel está localizada en el punto *B*, el cual está 50' al sur, 110' al este y 50' por debajo de *A*. Este segundo túnel tiene un rumbo N 45° E sobre un declive ascendente del 35%. Ver Fig. 3-14. Escala: 1" = 80'.

Problema: Determine la longitud verdadera, la pendiente y el declive del túnel más corto que una los dos túneles dados. Muestre este túnel en todas las vistas que sean necesarias. Use el método lineal.

Solución:

Usando los datos, localice los puntos *A* y *B* en la vista de planta. Por los puntos *A* y *B* trace dos líneas de longitud indefinida que tengan los rumbos dados. Localice la línea de pliegue *H*-1 paralela a la vista de planta del túnel que parte de *A*. Muestre el túnel que parte de *A* en la vista de elevación 1. Coloque la línea de pliegue *H*-2 paralela a la vista de planta del túnel que parte de *B*. Muestre el túnel que parte de *B* en la

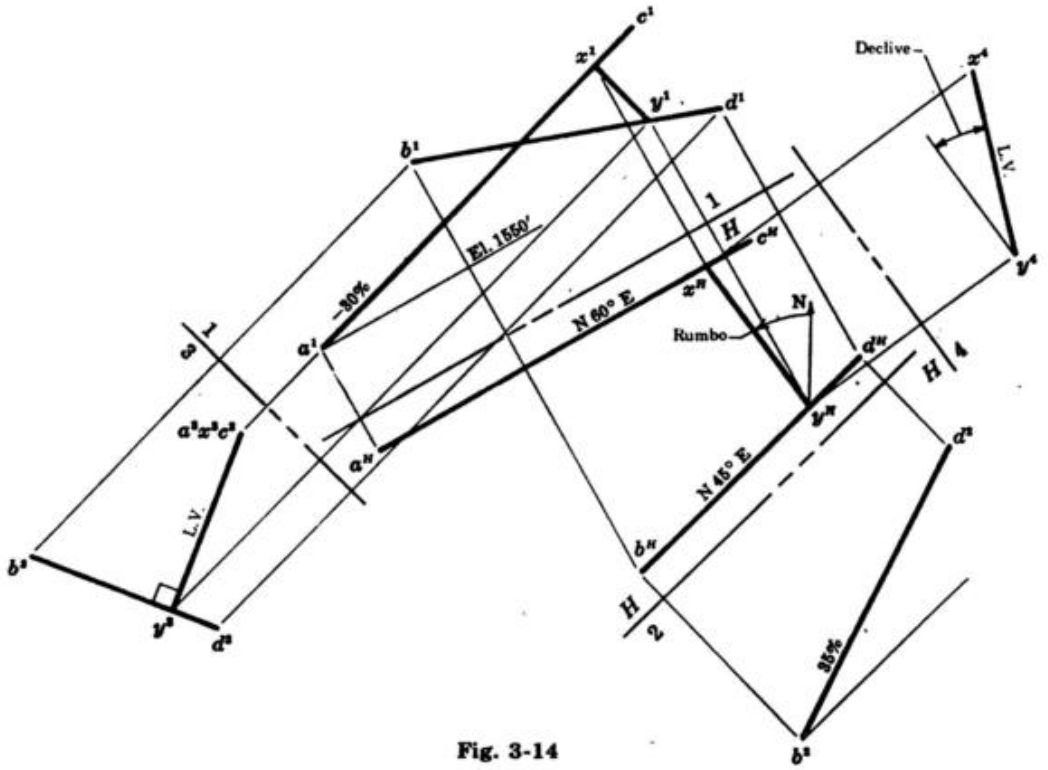


Fig. 3-14

vista de elevación 2. Proyecte el tunel que parte de *B* sobre la vista de planta y a partir de esta vista proyéctelo a la vista de elevación auxiliar 1. Localice la línea de pliegue 1-3 perpendicular al túnel que parte de *A*, representado en la vista 1. Muestre ambos túneles en la vista inclinada 3. El túnel que parte de *A* aparecerá como un punto en esta vista. A partir de esta vista de punta trace una línea perpendicular sobre el túnel que parte de *B*. Esta perpendicular es la distancia más corta que une los dos túneles dados. Llame *X* y *Y* los extremos de esta línea. Proyecte la línea *XY* sobre la vista de elevación 1 y a partir de ésta proyéctela sobre la vista de planta, en la cual se determinará su rumbo. Coloque la línea de pliegue *H*-4 paralela a la vista de planta de *XY* y dibuje una vista de elevación que represente la línea *XY* en su verdadera longitud. El declive del túnel de unión puede medirse en esta vista. Las elevaciones de los puntos *X* y *Y* se pueden medir en la vista 1.

Resp. L.V. = 80', rumbo = N 37° O, declive = 42%, elev. *X* = 1503', elev. *Y* = 1534'

9. Dado: *AB* y *CD* son las líneas medias de dos tubos de 3' de diámetro, como se muestra en la Fig. 3-15. El punto *B* está localizado 2' al este, 3' al norte y 2' por debajo de *A*. El punto *C* está localizado 1'—6" al este, 1'—6" al norte y a la misma elevación de *A*. El punto *D* está localizado 1' al oeste, 3' al norte y 2' por debajo de *A*. Escala: $\frac{1}{2}$" = 1'—0". **Problema:** ¿Qué espacio libre hay entre los dos tubos? Utilice el método lineal.

Solución:

Utilizando los datos, dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal de las líneas *AB* y *CD*. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 que muestre ambos tubos, uno de los cuales, *CD*, aparece en su longitud verdadera. Dibuje una vista inclinada 2 que muestre la línea media del tubo *CD* como un punto. Represente también la línea media del tubo *AB* en esta vista. Desde la vista de punta de *CD* trace una línea perpendicular a la línea *AB*. Puesto que esta distancia perpendicular está medida entre las líneas medias, el espacio libre entre los dos tubos es igual a la distancia perpendicular menos el diámetro de uno de los tubos (debido a que los dos tubos tienen igual diámetro).

Resp. Espacio libre = $4\frac{1}{2}$"

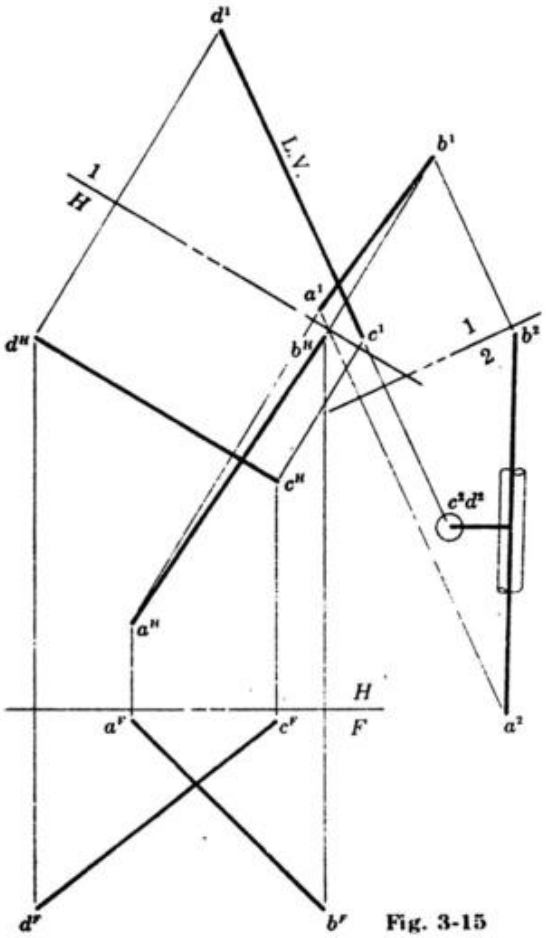


Fig. 3-15

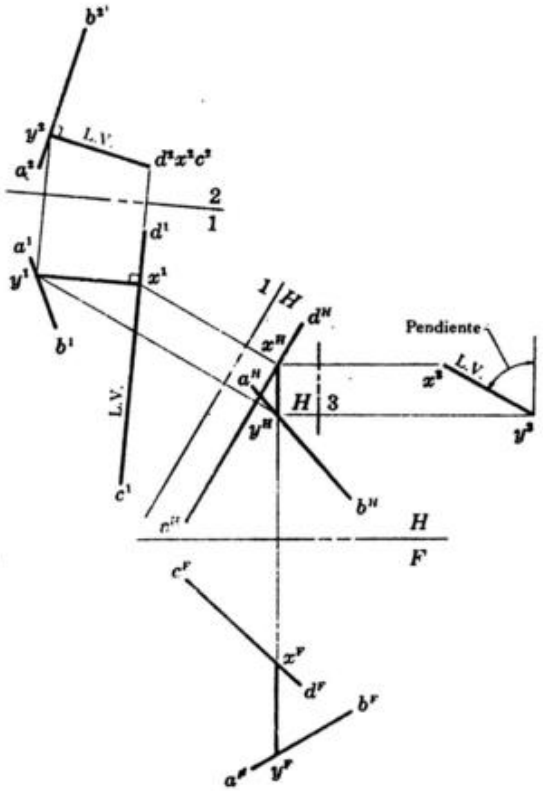


Fig. 3-16

10. Dado: Dos pozos de una mina, *AB* y *CD*, en la Fig. 3-16. El punto *B* está 300′ al sur, 260′ al este y 150′ por encima de *A*. El punto *C* está localizado 360′ al sur, 175′ al oeste y 500′ por encima de *A*. El punto *D* está 160′ al norte, 130′ al este y 220′ por encima de *A*. Escala: 1″ = 500′.

Problema: Se desea conectar estos dos túneles por medio de un nuevo túnel de ventilación. Determine la longitud verdadera, la pendiente y el rumbo del túnel de ventilación más corto posible que conecte los dos pozos. Muestre este túnel de ventilación en todas las vistas. Utilice el método lineal.

Solución:

Construya la vista de planta y la vista de elevación frontal de los pozos *AB* y *CD*. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 que muestre la longitud verdadera de *CD*. Proyecte también *AB* sobre esta vista. Dibuje una vista inclinada 2 que muestre el pozo *CD* como un punto. Proyecte *AB* sobre esta vista y trace una línea perpendicular desde la vista de punta de *CD* hasta la línea *AB*. Esta línea, *XY*, será la distancia más corta entre los dos pozos. Proyecte *XY* a la vista de planta para determinar el rumbo del túnel de ventilación. Dibuje una vista de elevación auxiliar 3 para obtener la longitud verdadera y la pendiente de *XY*. La longitud verdadera de *XY* en la vista 2 y en la vista 3 debe ser la misma.

Resp. L.V. = 275′, pendiente = 61°, rumbo = exact. Norte-Sur

11. Dado: Dos líneas que se cruzan, *AB* y *CD*, en la Fig. 3-17. El punto *B* está localizado 2′—6″ exactamente al este y 1′ por debajo de *A*. El punto *C* está 1′ al este, 1′ al sur y 1′ por encima de *A*. El punto *D* está localizado 3′ al este, 1′ al norte y 1′—6″ por encima de *A*. Escala: $\frac{3}{8}$″ = 1′—0″.

Problema: Determine la longitud verdadera, la pendiente y el rumbo de la distancia más corta desde la línea *AB* hasta la línea *CD*. Muestre la distancia más corta en todas las vistas.

Solución:

Dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal de las líneas *AB* y *CD*. Dibuje una vista inclinada 1 que muestre la línea *CD* y la vista de punta de la línea *AB*. A partir de la vista de punta de la línea *AB* trace una línea perpendicular a *CD*. Llame esta línea, *XY*. La línea *XY*, en esta vista, es la distancia más corta entre las líneas *AB* y *CD*. Proyecte *XY* a las otras vistas. El rumbo de la distancia más corta desde *AB* hasta *CD* se determinará en la vista de planta. Dibuje una vista de elevación auxiliar 2 para obtener la pendiente de *XY*, así como también para verificar la longitud verdadera obtenida en 1.

Resp. L.V. = 1′—7$\frac{1}{2}$″, pendiente = 52°, rumbo = S 32° E

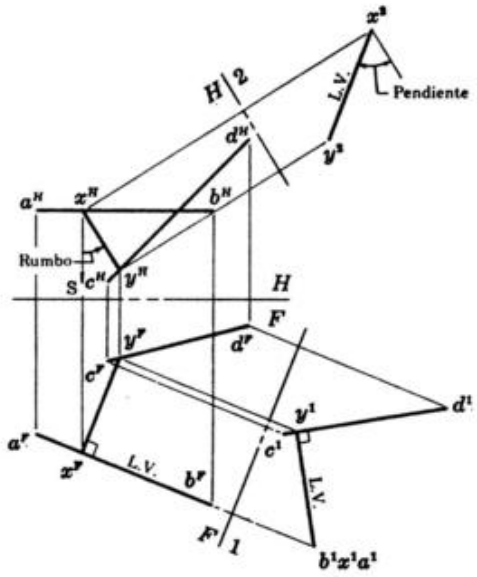


Fig. 3-17

12. Dado: Las líneas *AB* y *CD* son las líneas medias de dos tubos de alcantarillado. El punto *B* está 15′ al norte, 75′ al oeste y 55′ por encima de *A*. El punto *C* está localizado 25′ exactamente al sur y 75′ por encima de *A*. El punto *D* está 40′ al norte, 40′ al oeste y 40′ por encima de *A*. Escala: 1″ = 80′. Ver la Fig. 3-18.

Problema: Utilizando únicamente tes a 90°, muestre dónde se conectan los dos tubos de alcantarillado por medio de un tercer tubo que tenga la longitud más corta posible. Determine la verdadera longitud, la pendiente y el rumbo del tercer tubo. Muestre este tubo en todas las vistas. Utilice el método del plano.

Solución:

Utilizando los datos, dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal de las líneas *AB* y *CD*. Construya un plano *CDE* que contenga una línea *CE*, la cual es paralela a la línea *AB* en ambas vistas. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 para obtener una vista de filo del plano paraleia a la línea *AB*. La distancia perpendicular entre *AB* y *CD* en la vista 1 es la longitud verdadera del tubo de conexión más corto. Para obtener la localización exacta de esta distancia más corta, se debe dibujar una vista inclinada 2 que muestre el tubo de conexión como un punto. Llame esta vista de punta del tubo de conexión, *XY*, y proyéctela a las otras vistas. El rumbo del tercer tubo se medirá en la vista de planta. En la vista de elevación auxiliar 1 se determinará la longitud verdadera y la pendiente del tubo de conexión más corto. *Resp.* L.V. = 26'—0", pendiente = 35°, rumbo = N 41° E.

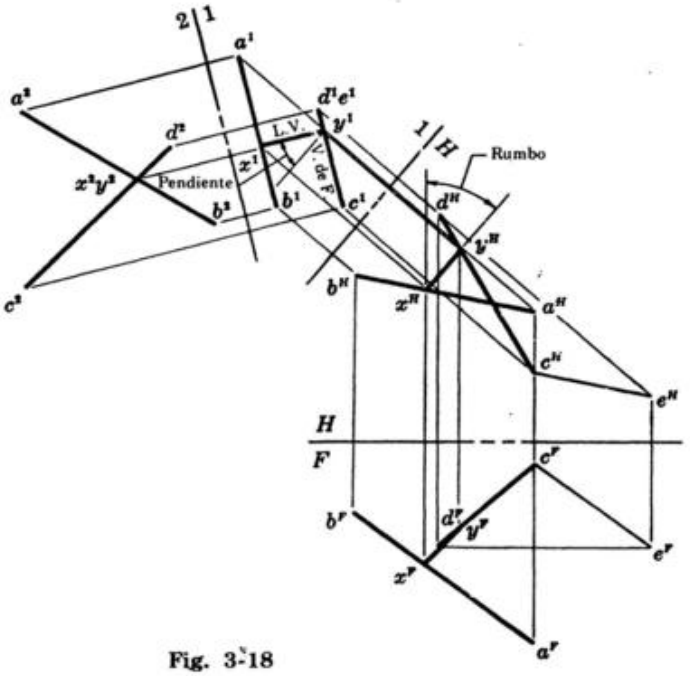


Fig. 3-18

13. Dado: Dos túneles de una mina, *AB* y *CD*. El punto *B* está 360' al este, 310' al sur y 400' por debajo de *A*. El punto *C* está 60' al este, 400' al sur y 320' por debajo de *A*. El punto *D* está 375' al este, 60' al sur y 50' por debajo de *A*. Ver la Fig. 3-19. Escala: 1" = 400'. **Problema:** ¿Cuál será la longitud verdadera y cuál el rumbo del túnel horizontal más corto que conecte a *AB* con *CD*? Muestre el túnel horizontal más corto en todas las vistas.

Solución:

Localice los túneles *AB* y *CD* en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. En ambas vistas dibuje un plano *CDE* que contenga a la línea *DE*, la cual es paralela a la línea *AB*. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 que muestre la línea *AB* paralela al plano *CDE*. La distancia horizontal entre las dos líneas paralelas es la distancia pedida, pero la localización exacta de este túnel horizontal no se conoce. Una vista de punta del túnel horizontal establecerá su localización en la vista 1. Localice la línea de pliegue 1-2 perpendicular a la línea de pliegue *H*-1. Por tanto la vista 2 será una vista de elevación que mostrará la línea horizontal como un punto. Llame el túnel horizontal, *XY*, y proyéctelo a las otras vistas. La longitud verdadera se medirá en la vista de planta o en la vista de elevación auxiliar 1. El rumbo se obtiene en la vista de planta.

Resp. L.V. = 95', rumbo = N 14° O

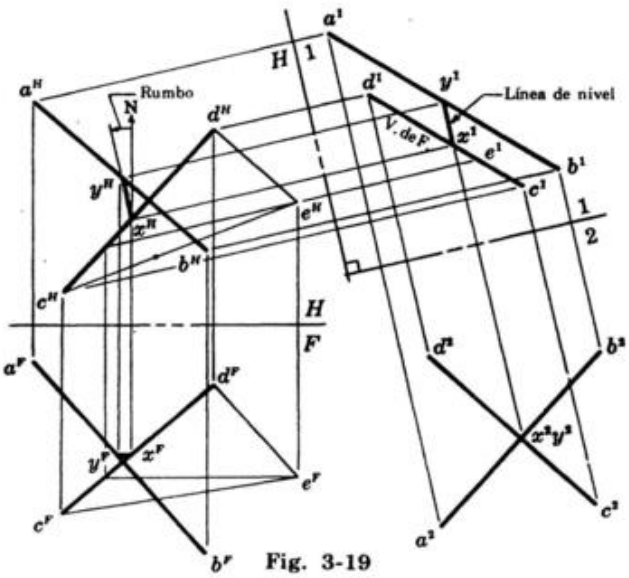


Fig. 3-19

14. Dado: *AB* y *CD* son las líneas medias de dos cañerías (ver la Fig. 3-20). El punto *B* está 15' al norte, 60' al oeste y 20' por encima de *A*. El punto *C* está 15' al sur, 5' al este y 80' por encima de *A*. El punto *D* está 60' al norte, 25' al oeste y 30' por encima de *A*. Escala: 1" = 80'.

Problema: Muestre los puntos donde se deben hacer las conexiones de las dos cañerías con el tubo horizontal más corto posible. ¿Cuál será la longitud verdadera y cuál el rumbo del tubo horizontal más corto posible? Muestre la distancia horizontal más corta, en todas las vistas. Prolongue las líneas para hallar la solución del problema, si es necesario.

Solución:

Usando los datos, construya la vista de planta y la vista de elevación frontal de las líneas *AB* y *CD*. Dibuje un plano *CDE* que contenga una línea *DE* que sea paralela a la línea *AB*, en ambas vistas. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 que muestre la vista de filo del plano paralela a la línea *AB*. La distancia horizontal entre las dos líneas paralelas, en la vista 1, es la longitud verdadera del tubo de conexión horizontal más corto posible. Para determinar la localización exacta de la distancia horizontal más corta, dibuje una vista de elevación 2, con la línea de pliegue 1-2 perpendicular a la línea de pliegue *H*-1. La intersección de las líneas *AB* y *CD* en la vista 2 localizará la vista de punta de la distancia horizontal más corta. Llame esta intersección *XY* y proyéctela a las otras vistas. El rumbo de *XY* se medirá en la vista de planta y la línea horizontal *XY* debe aparecer paralela a la línea de pliegue *H*-*F* en la vista de elevación frontal.

Resp. L.V. = 68′, rumbo = N 32°30′ E

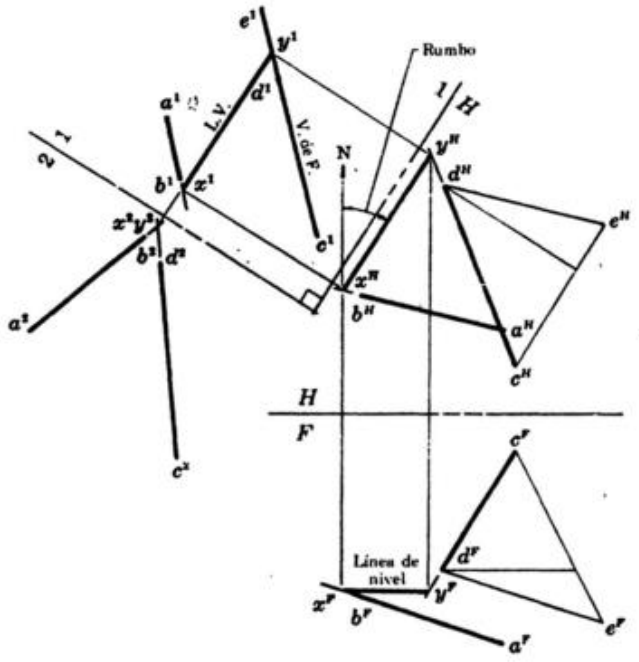


Fig. 3-20

15. **Dado:** Dos túneles *AB* y *CD* en la Fig. 3-21. El punto *B* está localizado 80′ al este, 20′ al norte y 30′ por debajo de *A*. El punto *C* está localizado 10′ al este, 75′ al norte y 60′ por encima de *A*. El punto *D* está localizado 100′ al este, 45′ al norte y 45′ por encima de *A*. Escala: 1″ = 60′.

Problema: Los dos túneles deben conectarse por medio de un conducto de ventilación que parte desde el punto medio de *AB* y penetra al segundo túnel *CD* formando un ángulo de 60°. Determine la longitud verdadera, la pendiente y el rumbo del conducto de ventilación. Muestre el conducto en todas las vistas.

Solución:

Dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal de los túneles *AB* y *CD*. En ambas vistas una los extremos del túnel *CD* con el punto medio del túnel *AB*. Dibuje una vista inclinada 1 que muestre el plano *CDX* como un filo. Dibuje una vista inclinada 2 que muestre el tamaño verdadero del plano *CDX*. A partir del punto *X*, en esta vista, trace una línea que corte a *CD* haciendo un ángulo de 60°. Llame *Y* este punto de intersección y proyéctelo a las otras vistas. El rumbo del conducto de ventilación se medirá en la vista de planta. Dibuje una vista de elevación auxiliar 3 que muestre la longitud verdadera y la pendiente de la línea *XY*. Por supuesto, la longitud verdadera de *XY* obtenida en la vista 3 será igual a la obtenida en la vista 2.

Resp. L.V. = 97', pendiente = 49°30', rumbo = N 17°30' O

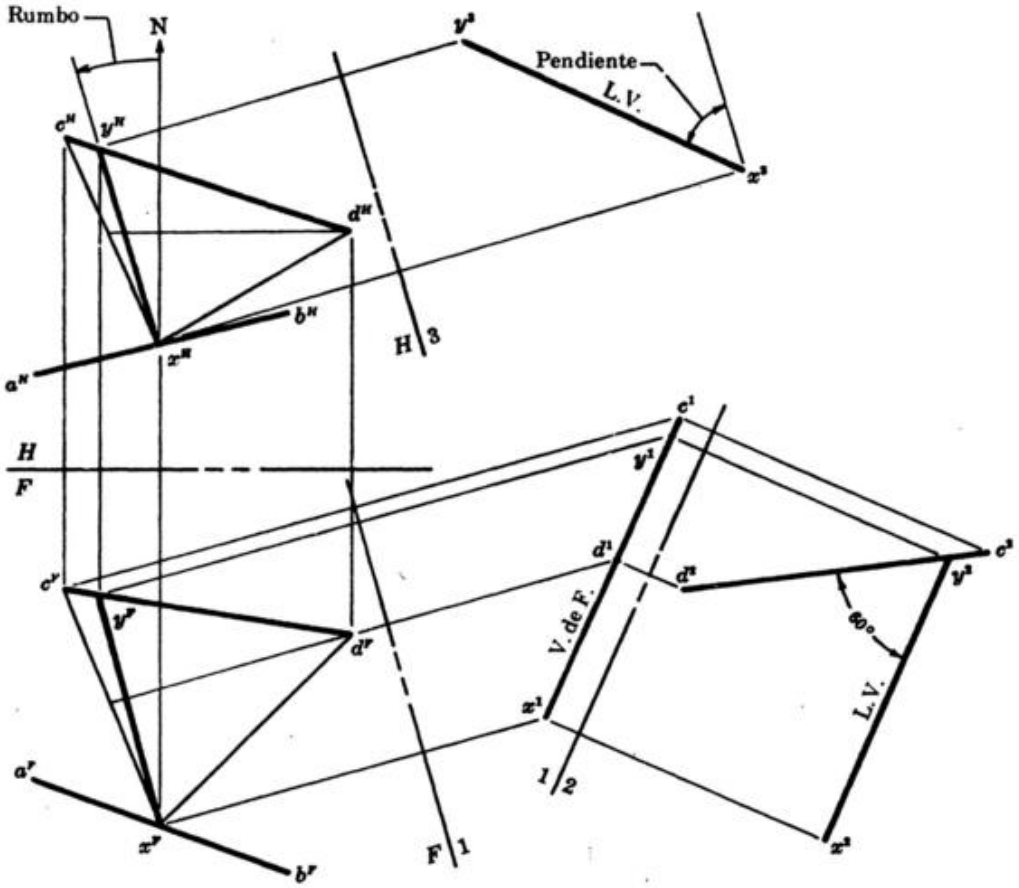


Fig. 3-21

16. **Dado:** Las líneas medias de dos líneas de alcantarillado están determinadas por las líneas *AB* y *CD*, como se muestra en la Fig. 3-22. El punto *B* está 50' exactamente al este y 20' por encima de *A*. El punto *C* está 10' exactamente al norte y 30' por debajo de *A*. El punto *D* está 30' al este, 30' al sur y a la misma elevación de *A*. Escala: 1" = 30'—0".

Problema: Las líneas de alcantarillado deben conectarse por medio de un tubo que tiene un declive descendente del 25% a partir de la línea *AB*. Determine la longitud verdadera y el rumbo del tubo de conexión más corto posible. Muestre este tubo en todas las vistas.

Solución:

Usando los datos, construya la vista de planta y la vista de elevación frontal de las líneas *AB* y *CD*. Dibuje un plano *ABE* que contenga a la línea *AE*, la cual debe ser paralela a la línea *CD* en ambas vistas. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 que muestre la línea *CD* paralela a la vista de filo del plano *ABE*. Para obtener la localización exacta de la línea con pendiente determinada que se pide, trace una línea de pliegue 1-2 perpendicular a la línea direccional que tiene un declive de —25%. La intersección de las líneas *AB* y *CD* en la vista inclinada 2 mostrará la línea pedida como un punto. Llame este tubo de conexión *XY*, y proyéctelo a las otras vistas. La longitud verdadera aparece en la vista de elevación auxiliar 1 y el rumbo se mide en la vista de planta.

Resp. L.V. = 30'—6", rumbo = S 40° E

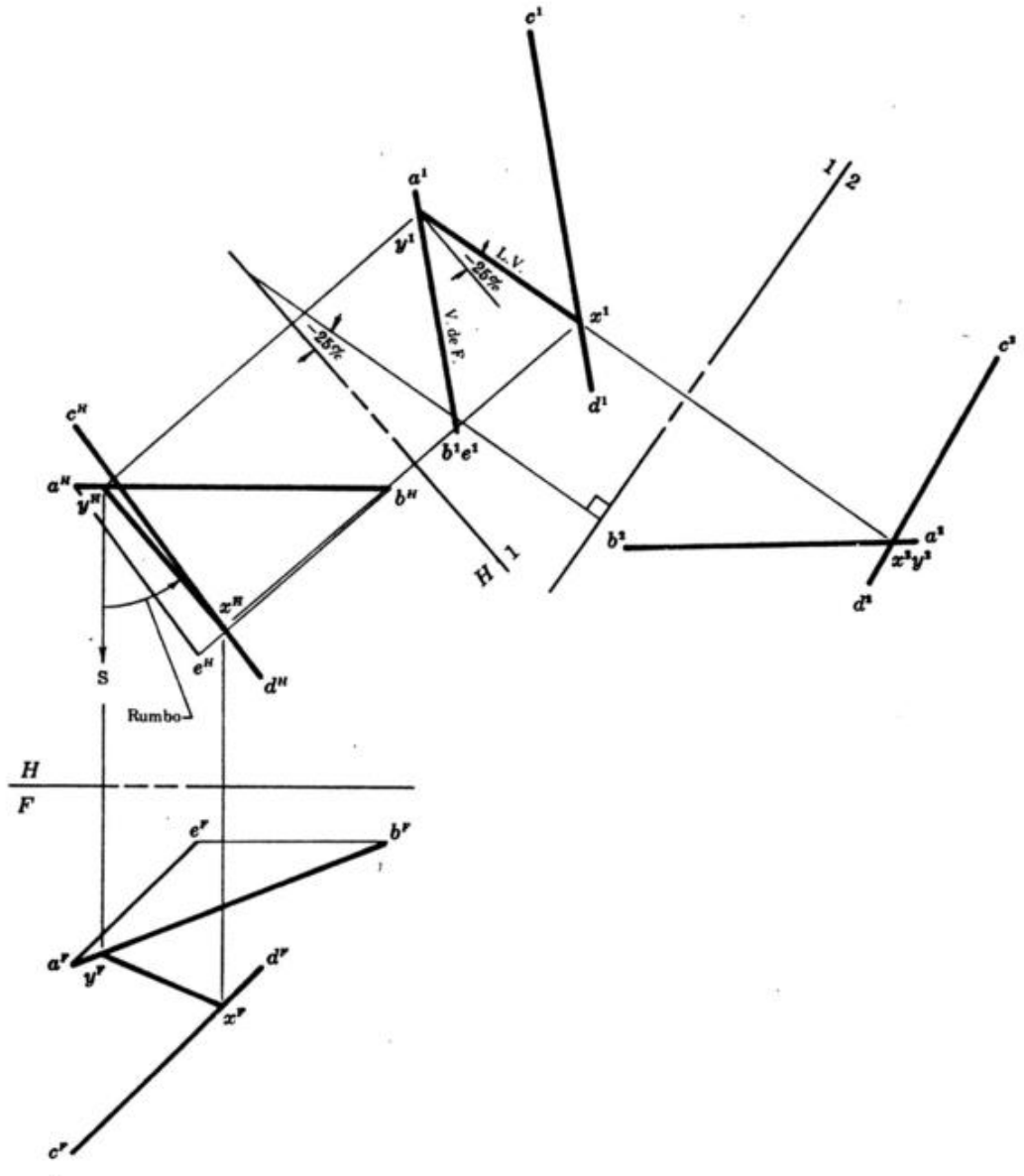


Fig. 3-22

Problemas propuestos

En cada uno de los problemas 17 a 23 dibuje un plano que contenga a la línea *AB* y además sea paralelo a la línea *CD*. Para verificar su solución dibuje una vista de filo del plano, para determinar si la línea *CD* es paralela al plano. Encuentre la pendiente del plano. Ver en el Art. 1.7 el sistema de coordenadas para la presentación de problemas.

17. $A(1, 1, 6)$, $B(3, 2\frac{1}{2}, 6)$, $C(\frac{1}{2}, 2, 4)$, $D(2\frac{1}{2}, 2, 5)$. *Resp.* pendiente = 60°

18. $A(1, \frac{1}{2}, 4)$, $B(2, 3, 6)$, $C(3, 1, 5\frac{1}{2})$, $D(4, 3, 5)$. *Resp.* pendiente = 65°

19. $A(2, 1, 5\frac{1}{2})$, $B(3, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$, $C(1, 2, 5)$, $D(4, 2, 5)$. *Resp.* pendiente = 67°

20. $A(1, 1, 5)$, $B(4, \frac{1}{2}, 5)$, $C(2, 2, 4)$, $D(4\frac{1}{2}, 3, 5\frac{1}{2})$. *Resp.* pendiente = 44°30′

21. $A(2, 3, 4)$, $B(4, 2, 6)$, $C(2, 1, 5)$, $D(5, 2\frac{1}{2}, 4)$. *Resp.* pendiente = 38°30′

22. Las líneas *AB* y *CD*. El punto *B* está localizado 3′ al este, 3′ al sur y a la misma elevación que *A*. El punto *C* está localizado 2′ al este, 2′ al norte y 3′ por debajo de *A*. El punto *D* está 6′ al este, 1′ al sur y 1′ por encima de *A*. Escala: $\frac{1}{2}'' = 1'—0''$. *Resp.* Pendiente = 70°30′

23. Las líneas *AB* y *CD*. El punto *B* está localizado 3′ exactamente al norte y 2′ por encima de *A*. El punto *C* está localizado 2′ al este, 2′ al norte y 2′ por encima de *A*. El punto *D* está 4′ exactamente al este y 3′ por encima de *A*. Escala: $\frac{1}{2}'' = 1'—0''$. *Resp.* Pendiente = 54°30′

24. La Fig. 3-23 muestra la vista de planta y la vista de elevación frontal de dos puntales de soporte, *AB* y *CD*. El punto *B* está localizado 7′ exactamente al este y 4′ por debajo de *A*. El punto *C* está 6″ al este, 1′—6″ al sur y 2′ por debajo de *A*. El punto *D* está localizado 8′ al este, 4′ al sur y 2′ por debajo de *A*. Escala: $\frac{1}{2}'' = 1'—0''$. Determine la longitud verdadera, la pendiente y el rumbo del puntal más corto que una *AB* con *BC*.
Resp. L.V. = 2′—1″, pendiente = 30°, rumbo = N 18°30′ E

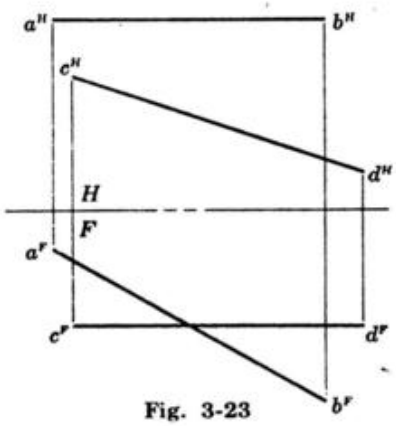


Fig. 3-23

25. Dos pozos de una mina, *AB* y *CD*. El punto *B* está 300′ al sur, 260′ al este y 150′ por encima de *A*. El punto *C* está localizado 360′ al sur, 175′ al oeste y 500′ por encima de *A*. El punto *D* está localizado 160′ al norte, 130′ al este y 220′ por encima de *A*. Escala: 1″ = 200′. Se desea conectar estos dos pozos por medio de un túnel de ventilación. Determine la longitud verdadera, la pendiente y el rumbo del túnel de ventilación más corto posible que una los dos pozos. Muestre este túnel de ventilación en todas las vistas. Utilice el método del plano.
Resp. L.V. = 275′, pendiente = 61°, rumbo = exactamente Norte-Sur

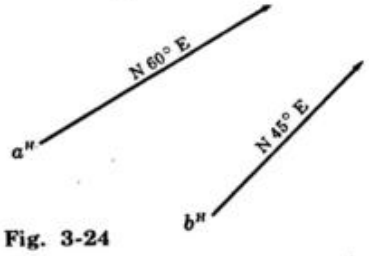


Fig. 3-24

26. El punto *A*, situado a una elevación de 1550′, es la boca del túnel de una mina, el cual tiene un rumbo N 60° E y un declive descendente del 30%. La boca de un segundo túnel está localizada en el punto *B*, el cual está 50′ al sur, 110′ al este y 50′ por debajo de *A*. Este segundo túnel tiene un rumbo N 45° E sobre un declive ascendente del 35%. Escala: 1″ = 50′. Ver la Fig. 3-24. Determine la longitud verdadera, el rumbo y el declive del túnel de conexión más corto. ¿Cuáles serán las elevaciones de los extremos del túnel de conexión? Muestre el túnel de conexión en todas las vistas. Utilice el método del plano.
Resp. L.V. = 80′, rumbo = N 37° O, declive = 42%. Elev. de *X* = 1503′, elev. de *Y* = 1534′

En los problemas 27 a 31 determine la longitud verdadera, la pendiente y el rumbo de la distancia más corta entre dos líneas que se cruzan, *AB* y *CD*. Muestre la línea de distancia más corta en todas las vistas. Utilice el método lineal.

Ver en el Art. 1.7 la presentación de problemas por medio de coordenadas.

27. $A(2, 4, 7)$, $B(2, 2, 7)$, $C(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 5)$, $D(5, 3\frac{1}{2}, 6)$. Escala: 1″ = 1′—0″.
Resp. L.V. = 1′—9$\frac{1}{2}$″, pendiente = 0°, rumbo = N 16° O

28. $A(2, 3, 5)$ $B(4\frac{1}{2}, 1, 6)$, $C(5\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$, $D(4, 4, 6)$. Escala: 1″ = 1′—0″.
Resp. L.V. = 2′—2″, pendiente = 54°, rumbo = N 63° E

29. $A(2, 3\frac{1}{2}, 5)$, $B(5, 3\frac{1}{2}, 6)$, $C(2, 4, 6\frac{1}{2})$, $D(5\frac{1}{2}, 1, 5\frac{1}{2})$. Escala: $\frac{1}{4}'' = 1'—0''$.
Resp. L.V. = 3′—6″, pendiente = 34°, rumbo = N 19° O

30. $A(4, 1, 6)$, $B(7, 3, 5)$ $C(6, 1\frac{1}{2}, 7)$, $D(7, 1, 5)$. Escala: $\frac{1}{2}'' = 1'—0''$.
Resp. L.V. = 2′—7″, pendiente = 42°, rumbo = N 52° E

31. $A(5, 1, 5)$, $B(7, 3, 5)$, $C(6, 1, 7)$, $D(7, 0, 5)$. Escala: $\frac{3}{8}'' = 1'—0''$.
Resp. L.V. = 4′—6″, pendiente = 34°, rumbo = N 45° E

32. Las líneas AB y CD son las líneas medias de dos líneas de alcantarillado. El punto B está 15' al norte, 75' al oeste y 55' por encima de A. El punto C está localizado 25' exactamente al sur y 75' por encima de A. El punto D está 40' al norte, 40' al oeste y 40' por encima de A. Escala: 1" = 40'. Utilizando únicamente tes a 90°, muestre dónde se conectan los dos tubos de alcantarillado por medio de un tercer tubo de longitud lo más corta posible. Determine la longitud verdadera, la pendiente y el rumbo del tercer tubo. Muestre este tercer tubo en todas las vistas. Utilice el método lineal. *Resp.* L.V. = 26'—0", pendiente = 35°, rumbo = N 41° E

33. AB y CD son dos cables de mando. (Ver la Fig. 3-25.) Los cables están localizados así: $A(1, 3, 7)$, $B(3, 4, 4\frac{1}{2})$, $C(\frac{1}{2}, 4, 4\frac{1}{2})$, $D(2\frac{1}{2}, 2, 6)$. Escala: 1" = 1'—0". Utilizando el método lineal, determine el espacio libre entre los dos cables. Ver en el Art. 1.7 la presentación de problemas por medio de coordenadas. *Resp.* Espacio libre = 10"

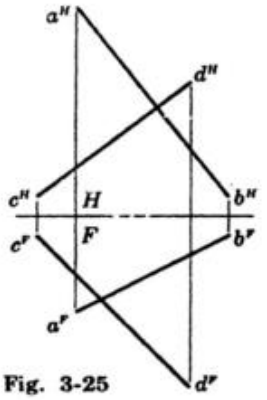


Fig. 3-25

34. Los puntos A y B son los soportes de dos cables. El punto B está 4' al sur, 2' al este y 5' por debajo de A. El cable que parte de A tiene un rumbo S 60° E y una pendiente descendente de 30°. El cable que parte de B tiene un rumbo N 45° E y una pendiente de —20°. Escala: $\frac{1}{4}$" = 1'—0". Determine el espacio libre entre los dos cables. *Resp.* Espacio libre = 2'—10"

35. Dos líneas de servicio, AB y CD. El punto B está localizado 5' al este, 30' al sur y 15' por debajo de A. El punto C está localizado 15' al este, 30' al sur y a la misma elevación de A. El punto D está localizado 30' al este, 20' al sur y 12' por debajo de A. Escala: 1" = 20'—0". Determine la longitud verdadera, la pendiente y el rumbo de la distancia más corta entre las dos líneas. *Resp.* L.V. = 17'—6", pendiente = 45°, rumbo = N 72° O

36. Un marco de soporte de cuatro lados se muestra en la Fig. 3-26. Un cable debe prolongarse a partir del punto X en una dirección S 60° E con una pendiente descendente de 40°. Escala: $\frac{1}{4}$" = 1'—0". ¿Cuál es el espacio libre entre el cable y el miembro del marco más cercano a él? Muestre este espacio libre en todas las vistas. *Resp.* Espacio libre = 2'—9"

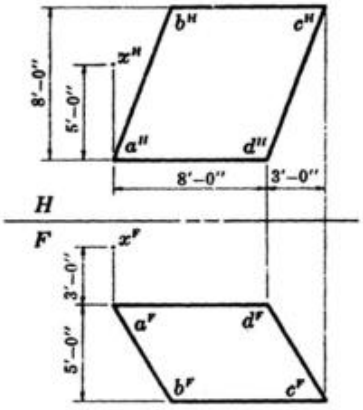


Fig. 3-26

En cada uno de los siguientes problemas (37 a 41) determine la longitud verdadera y el rumbo de la distancia horizontal más corta que une las líneas cruzadas AB y CD.

Si es necesario prolongue las líneas para hallar la solución del problema. Muestre la distancia horizontal más corta en todas las vistas. Ver en el Art. 1.7 el sistema de coordenadas para la presentación de problemas.

37. $A(4\frac{1}{2}, 1, 5)$, $B(5\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 7)$, $C(5, 2, 4\frac{1}{2})$, $D(7, 2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$. Escala: 1" = 1'—0"
Resp. L.V. = 1'—9", rumbo = N 10° O

38. $A(1, 3\frac{1}{2}, 5)$, $B(3, \frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$, $C(1, \frac{1}{2}, 4)$, $D(4, 2, 5\frac{1}{2})$. Escala: 1" = 40'.
Resp. L.V. = 5'—6", rumbo = N 8° O

39. $A(2, 4, 7)$, $B(4\frac{1}{2}, 2, 6)$, $C(3, 2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$, $D(5, 4, 5)$. Escala: 1" = 30'.
Resp. L.V. = 29'—0", rumbo = N 14° E

40. $A(3, 3, 6)$, $B(5, 2, 6\frac{1}{2})$, $C(2, 2\frac{1}{2}, 4)$, $D(4, 3\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$. Escala: 1" = 50'.
Resp. L.V. = 55'—6", rumbo = N 26° O

41. $A(1, 1\frac{1}{2}, 5)$, $B(3, 3, 6)$, $C(3, 1, 6)$, $D(4, 2\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$. Escala: 1" = 30'.
Resp. L.V. = 59'—0", rumbo = N 68° O

42. Dos tubos están determinados por sus líneas medias AB y CD, como se muestra en la Fig. 3-27. El punto B está localizado 10' al norte, 50' al oeste y 35' por encima de A. El punto C está localizado 20' al sur, 5' al oeste y 60' por encima de A. El punto D está localizado 40' al norte, 30' al oeste y 25' por encima de A. Escala: 1" = 20'—0". ¿Cuál será la longitud verdadera y el rumbo del tubo horizontal más corto posible que conecte AB con CD? Muestre el tubo horizontal en todas las vistas.
Resp. L.V. = 27'—6", rumbo = N 43°30' E

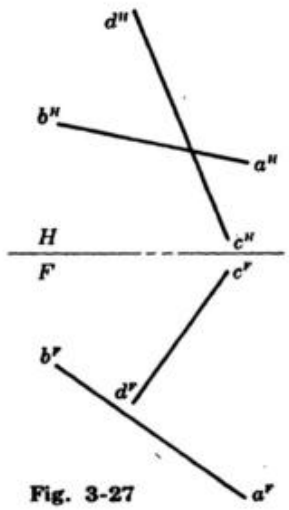


Fig. 3-27

43. Dos vientos de alambre, *AB* y *CD*, están localizados así: *B* está 20' al este, 5' al sur y 18' por debajo de *A*. El punto *C* está localizado 12' exactamente al este y 5' por encima de *A*. El punto *D* está localizado 20' al este, 10' al norte y 15' por debajo de *A*. Escala: 1" = 10'—0". Determine la longitud verdadera, la pendiente y el rumbo del alambre más corto que una los dos vientos.

Resp. L.V. = 10'—0", pendiente = 32°, rumbo = N 47°E

44. Un soporte de tres tubos se muestra en la Fig. 3-28 con un cable *XY* que pasa a través de él. Escala: 1" = 10'—0". ¿A qué distancia del marco pasa el cable?

Resp. Distancia = 6"

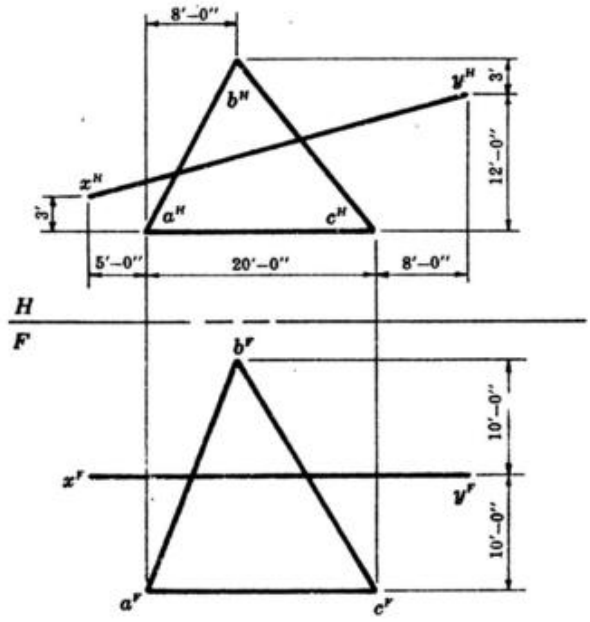


Fig. 3-28

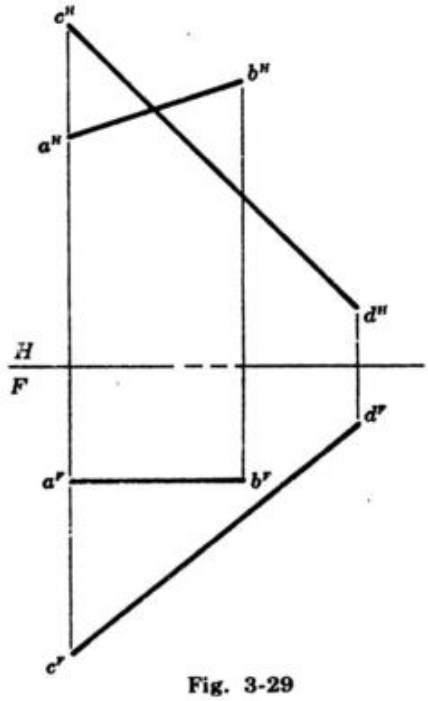


Fig. 3-29

En cada uno de los siguientes problemas (45 a 49) determine la longitud verdadera y el rumbo de la línea más corta de pendiente dada que une dos líneas cruzadas, *AB* y *CD*.

Las pendientes o declives dados expresan la inclinación de la línea más corta desde la línea *AB* hasta la línea *CD*. Si es necesario prolongue las líneas para hallar la solución de los problemas. Muestre la línea más corta en todas las vistas. Vea en el Art. 1.7 la presentación de problemas por medio de coordenadas.

45. $A(1, 2\frac{1}{2}, 6)$, $B(2\frac{1}{2}, 3, 6)$, $C(1, 1, 7)$, $D(3, 3, 5)$. 25% hacia abajo. Escala: 1" = 1'—0".

Resp. L.V. = $10\frac{1}{2}$", rumbo = S 27° E

46. $A(3, 3, 4\frac{1}{2})$, $B(6, 1, 5)$, $C(5, 2, 5\frac{1}{2})$, $D(6\frac{1}{2}, 3, 4)$. 30° hacia arriba. Escala: 1" = 20'.

Resp. L.V. = 13'—9", rumbo = N 23° E

47. $A(2, 3, 7)$, $B(3, 3\frac{1}{2}, 7)$, $C(\frac{1}{2}, 1, 6\frac{1}{2})$, $D(2\frac{1}{2}, 3, 5\frac{1}{2})$. 30% hacia abajo. Escala: $\frac{1}{4}$" = 1'—0".

Resp. L.V. = 5'—2", rumbo = S 25° E

48. $A(2\frac{1}{2}, 2, 5)$, $B(5\frac{1}{2}, 1, 4\frac{1}{2})$, $C(5\frac{1}{2}, 2, 6)$, $D(6, 3, 4\frac{1}{2})$. 20° hacia arriba. Escala: 1" = 30'.

Resp. L.V. = 54'—6", rumbo = N 30°30' E

49. $A(1\frac{1}{2}, 2, 6\frac{1}{2})$, $B(3, 2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$, $C(\frac{1}{2}, 1, 6\frac{1}{2})$, $D(2\frac{1}{2}, 3, 5\frac{1}{2})$. 35% hacia abajo. Escala: 1" = 1'—0".

Resp. L.V. = $5\frac{1}{2}$", rumbo = S 37° O

50. *AB* y *CD* son las líneas medias de dos líneas de gas natural. Ver la Fig. 3-29. El punto *B* está 15' al este, 5' al norte y a la misma elevación de *A*. El punto *C* está 10' exactamente al norte y 15' por debajo de *A*. El punto *D* está 25' al este, 15' al sur y 5' por encima de *A*. Escala: 1" = 10'—0". Determine el tubo de conexión más corto que tenga una pendiente hacia abajo del 25%. ¿Cuál será la longitud verdadera y el rumbo de este tubo de conexión? Muestre el tubo de conexión en todas las vistas.

Resp. L.V. = 10'—6", rumbo = S 18°30' E

51. **Dos cañerías están determinadas por las líneas *AB* y *CD*. El punto *B* está 15′ al norte, 50′ al oeste y 40′ por encima de *A*. El punto *C* está 20′ al sur, 10′ al este y 60′ por encima de *A*. El punto *D* está 45′ al norte, 30′ al oeste y 40′ por encima de *A*. Escala: 1″ = 30′—0″. Determine la localización y la longitud verdadera del tubo de conexión más corto posible que tenga un rumbo N 20° E y una pendiente ascendente del 35%. Muestre el tubo de conexión en todas las vistas.**

Resp. L.V. = 33′—6″

52. **La dirección de vuelo de un avión a chorro situado en *A* es N 45° E, como se muestra en la Fig. 3-30. El avión está ganando altura a razón de 300′ por cada 1000′. Escala: 1″ = 1000′. Determine el espacio libre entre la trayectoria de vuelo y una obstrucción representada por la línea *XY*. $A(4\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 6)$, $X(5\frac{1}{4}, 2, 6\frac{1}{4})$, $Y(7, 3\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2})$.**

Resp. Espacio libre = 765′

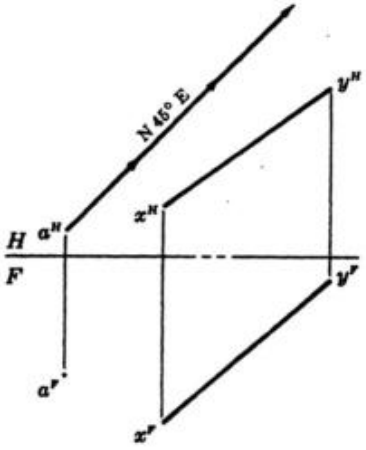


Fig. 3-30

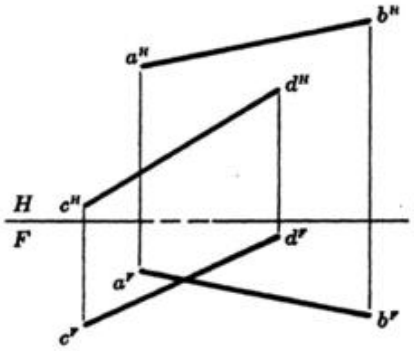


Fig. 3-31

53. **Las líneas medias de dos pozos de una mina están determinadas por las líneas *AB* y *CD*. Ver la Fig. 3-31. El punto *B* está 100′ al este, 20′ al norte y 20′ por debajo de *A*. El punto *C* está 60′ al sur, 25′ al oeste y 25′ por debajo de *A*. El punto *D* está 60′ al este, 10′ al sur y 15′ por encima de *A*. Un túnel de conexión, *XY*, es abierto entre los dos pozos principales. Su rumbo es N 45° O y su pendiente 30° descendiendo hacia el noroeste. Escala: 1″ = 50′. Determine la longitud verdadera del túnel de conexión. Muestre el túnel *XY* en todas las vistas.**

Resp. L.V. = 34′—6″

54. **Desde el punto *A*, cuya elevación es 1800′, arranca un túnel que tiene un rumbo S 20° E sobre un declive hacia abajo del 35%. Otro túnel parte del punto *B*, el cual está localizado 130′ al sur, 50′ al oeste y 120′ por encima de *A*. Este segundo túnel tiene un rumbo S 80° E sobre un declive hacia abajo del 20%. Escala: 1″ = 100′. ¿Cuál será la longitud verdadera, la pendiente y el rumbo del túnel de conexión más corto? ¿Cuáles serán las elevaciones de los extremos del túnel de conexión? Ilustre el túnel de conexión propuesto en todas las vistas. Utilice el método lineal. Represente con el punto *X* el extremo más bajo del túnel de conexión.**

Resp. L.V. = 145′, pendiente = 71°, rumbo = N 23° O, elev. de *X* = 1760′, elev. de *Y* = 1895′

55. ***AB* y *CD* determinan las líneas medias de dos túneles de una mina. El punto *B* está 350′ al sur, 180′ al oeste y 150′ por encima de *A*. El punto *C* está 350′ al sur, 300′ al oeste y 50′ por encima de *A*. El punto *D* está localizado 200′ al sur, 50′ al este y 100′ por encima de *A*. Escala: 1″ = 200′. ¿Cuál será la longitud verdadera y el rumbo del túnel horizontal de conexión más corto posible abierto entre los dos túneles dados? Muestre el túnel horizontal en todas las vistas.**

Resp. L.V. = 70′, rumbo = N 33° O

Capítulo 4

Puntos de penetración e intersección de planos

Al estudiante de geometría descriptiva le deberá parecer obvio que si una línea no pertenece a un plano, ni es paralela a él, le cortará. El conocimiento y la aplicación de este principio fundamental es esencial para la resolución de los problemas relacionados con la geometría descriptiva. Muchas de las soluciones de los próximos problemas de este texto dependen de la habilidad del estudiante para determinar el punto donde una línea corta a un plano.

4.1 DETERMINAR EL PUNTO DONDE UNA LINEA CORTA A UN PLANO

A. Método de la vista de filo

Análisis: Se supone que si una línea recta no pertenece a un plano, ni es paralela a él, le cortará en un punto que es común a la línea y al plano. Las dimensiones de la línea y del plano dados pueden aumentarse con el fin de determinar el "punto de penetración".

Puesto que la vista de filo de un plano contiene todos los puntos pertenecientes al plano, la vista que muestre el plano como un filo mostrará también el punto donde la línea atraviesa el plano.

Nota: Otro método utilizado es el de mostrar la línea como un punto. Esta vista de punta de la línea contiene el punto de penetración, que es común a la línea y al plano.

Ejemplo 1: (Dada la vista de filo del plano) En la Fig. 4-1 se da el plano *ABCD* y la línea *XY* en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. El plano aparece como un filo en la vista de planta. La intersección de la línea y el plano se determina por el punto *P*, que es común a ambos. Por medio de una visualización cuidadosa observamos que el segmento de línea *YP* está situado en su totalidad enfrente del plano y por tanto será visible en la vista frontal. La vista de planta muestra que el segmento de línea *XP* está situado en su totalidad detrás del plano y por tanto estará oculto en la vista frontal.

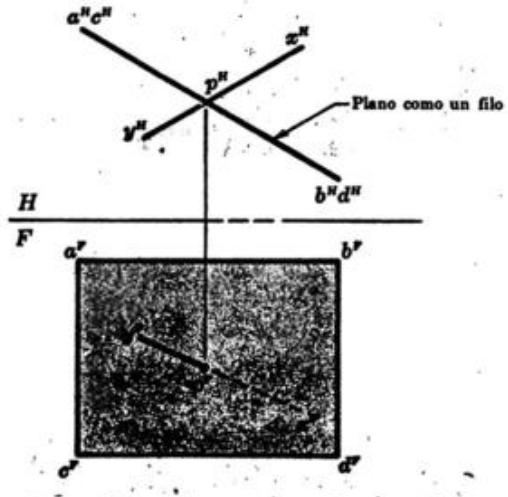


Fig. 4-1. Línea que corta un plano vertical

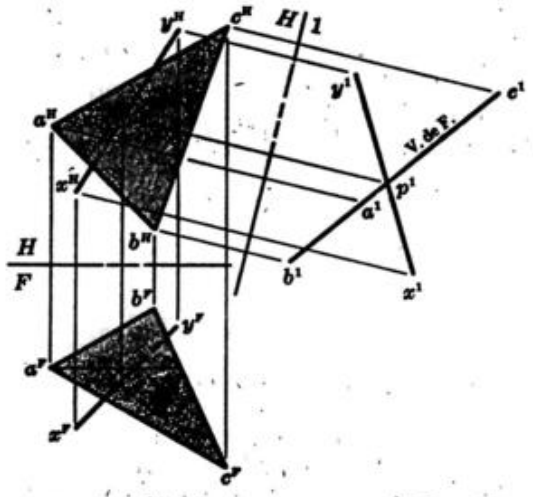


Fig. 4-2. Línea que corta un plano oblicuo

Ejemplo 2: (Plano oblicuo) En la Fig. 4-2 se da el plano *ABC* y la línea *XY* en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Dibuje una vista de elevación auxiliar que muestra el plano como un filo. En esta vista el punto de penetración *P* es el mismo punto de intersección, el cual puede proyectarse ahora a la vista de planta y a la vista de elevación frontal. Una visualización cuidadosa revela las partes visibles y ocultas de la línea

Nota: El punto de penetración también podría haberse determinado mostrando el plano como un filo en una vista inclinada, proyectada de la vista frontal.

B. Método del plano cortante (en dos vistas)

Análisis: La intersección de una línea y un plano oblicuo puede determinarse utilizando un plano cortante vertical que contenga a la línea dada. La línea de intersección del plano cortante con el plano oblicuo y la línea dada deben cortarse o ser paralelas, puesto que ambas están contenidas en el plano cortante vertical. (Ver la Fig. 4-3.) Puesto que éste aparece como un filo en la vista de planta, la posición relativa de la línea de intersección y de la línea dada no se manifiesta en esta vista. Sin embargo, las vistas relacionadas sí muestran esta situación. Las dos líneas se cortarán en una vista relacionada y es evidente que el punto de intersección es común al plano y a la línea dados, y por tanto, determina el punto de penetración de la línea dada en el plano dado.

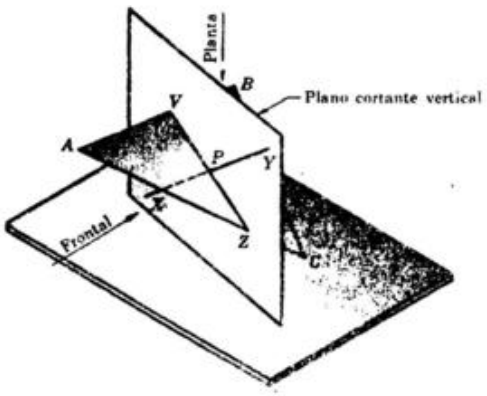


Fig. 4-3. Vista gráfica del método del plano cortante vertical

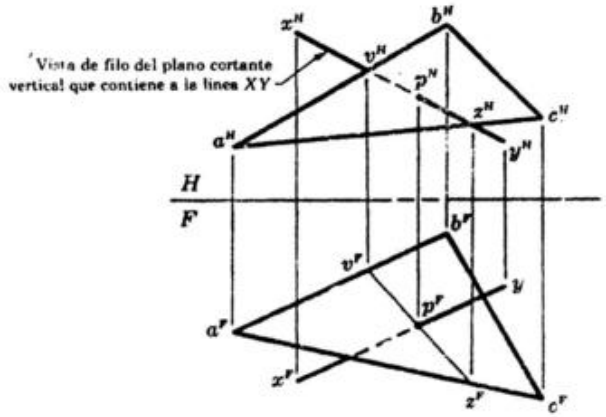


Fig. 4-4. Línea que corta un plano oblicuo (Método del plano cortante vertical)

Ejemplo: En la Fig. 4-4 se da el plano oblicuo *ABC* y la línea *XY* en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. En la vista de planta aparece como un filo un plano cortante vertical que contiene a la línea *XY* y coincide con ella en esta vista. La intersección del plano dado *ABC* con el plano cortante vertical que contiene a *XY* es la línea *VZ*. Las líneas *XY* y *VZ* pertenecen ambas al plano cortante vertical y se cortan en el punto *P*, en la vista frontal. Puesto que el punto *P* está sobre la línea *VZ*, también estará sobre el plano *ABC*, debido a que la línea *VZ* está contenida en el plano *ABC*. Por tanto, el punto *P* es el punto pedido, ya que es común a la línea dada, *XY*, y al plano dado, *ABC*. El punto *P* hallado puede ahora proyectarse a la vista relacionada. Haga una visualización cuidadosa para determinar qué parte de la línea es visible en cada vista.

Nota: Si la línea *VZ* hubiera aparecido paralela a *XY* en la vista frontal, significaría que la línea *XY* era paralela al plano *ABC* y por tanto no habría punto de intersección.

Se habría obtenido una solución análoga utilizando un plano cortante que se mostrara como un filo en la vista frontal y contuviera a la línea dada (Ver la Fig. 4-5).

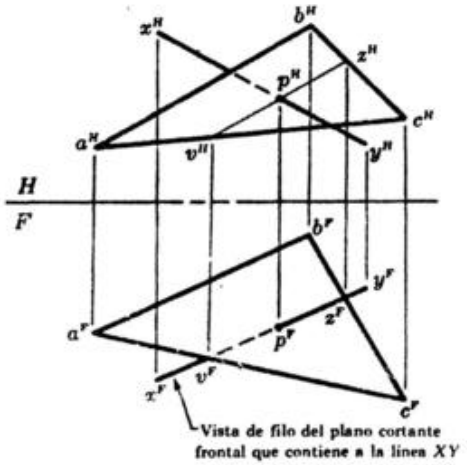


Fig. 4-5. Línea que corta un plano oblicuo (Método del plano cortante frontal)

Aunque el método en dos vistas tiene la ventaja de permitir una construcción rápida y el espacio utilizado es mínimo, el método de la vista de filo es, en general, más fácil de comprender por el estudiante.

4.2 INTERSECCION DE PLANOS

Uno de los problemas más comunes encontrados en la geometría descriptiva es el de determinar la línea de intersección de dos planos. Como se mencionó anteriormente, la extensión de un plano se considera indefinida y, por tanto, la línea de intersección entre dos planos también se considerará de longitud indefinida. En cambio, si una superficie plana particular es "cerrada" o limitada, la línea de intersección entre éste y otro plano se considerará también limitada.

La intersección entre dos planos oblicuos cualesquiera es una línea recta, común a los dos planos. Por tanto, dos puntos cualesquiera, comunes a ambos planos, determinarán la posición de la línea de intersección.

Los tres métodos generalmente usados para determinar la línea de intersección entre dos planos son: El método de la vista de filo, el método de los puntos de penetración y el método del plano cortante.

A. Método de la vista de filo

Caso I: Con la vista de filo dada

Análisis: Dos planos no paralelos se cortarán a lo largo de una línea recta que es común a ambos planos. Puesto que la dirección de una línea recta se determina por dos puntos cualesquiera de la línea, es necesario localizar dos puntos que sean comunes a ambos planos. Una vista de filo de uno de los planos mostrará los puntos donde dos líneas pertenecientes al otro plano cortan el plano representado como un filo.

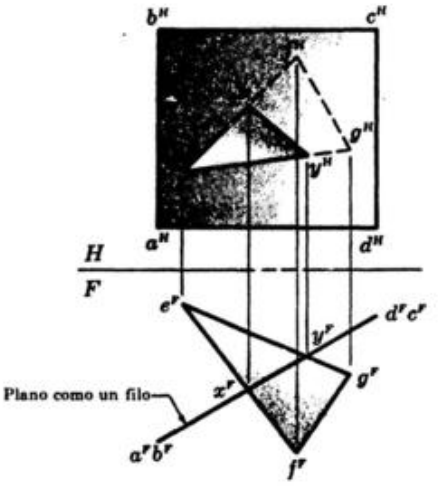


Fig. 4-6

Ejemplo: En la Fig. 4-6 se dan dos planos *ABCD* y *EFG*, en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. El plano *ABCD* se muestra como un filo en la vista frontal. Las líneas *EF* y *EG*, pertenecientes al plano *EFG*, cortan el plano *ABCD* en los puntos *X* y *Y*, respectivamente. Puesto que los puntos *X* y *Y* son comunes a ambos planos, deben estar situados en la línea de intersección. Para localizar la línea de intersección en la vista de planta, simplemente proyecte los puntos *X* y *Y* a sus correspondientes posiciones. La vista frontal muestra la parte *EXY* del plano *EFG* situada totalmente por encima del plano *ABCD*. Por tanto, *EXY* será visible en la vista de planta.

Caso II: La vista de filo no es dada

Análisis: Suponiendo que se dan dos vistas de cada plano, una vista adicional que muestre ambos planos (uno de ellos como un filo), mostrará dos puntos comunes a ambos planos, determinando de este modo la línea de intersección.

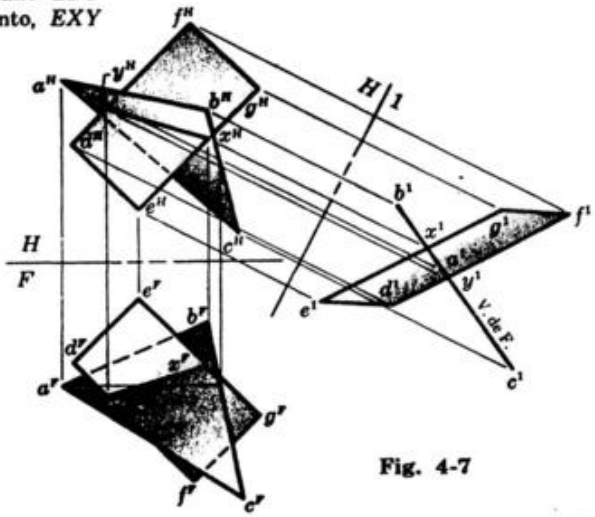


Fig. 4-7

Ejemplo: En la Fig. 4-7 se da la vista de planta y la vista de elevación frontal de los planos *ABC* y *DEFG*. Se dibuja una vista de elevación auxiliar que muestre ambos planos, uno de los cuales, *ABC*, aparece como un filo. En esta vista la línea *EG* del plano *DEFG*

atraviesa el plano *ABC* en el punto *X* y la línea *DF* lo atraviesa en el punto *Y*. Los puntos *X* y *Y* son dos puntos situados sobre la línea de intersección entre los dos planos.

En este problema los dos planos dados están limitados y se puede considerar que los extremos de la línea de intersección son los puntos *X* y *Y*. Por medio de una cuidadosa visualización se determinará la visibilidad de las otras líneas pertenecientes a los planos.

B. Método de los puntos de penetración (en dos vistas)

Análisis: Siguiendo el método del Art. 4.1-*B*, se puede seleccionar una línea perteneciente a uno de los planos y el punto donde la línea atraviesa al otro plano será un punto común a los dos planos. Luego se repite el procedimiento, utilizando otra línea y determinando el punto donde atraviesa al otro plano. Estos dos "puntos de penetración" determinan la línea de intersección entre los dos planos.

Ejemplo: Los dos planos oblicuos *ABC* y *DEFG* se dan en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Ver la Fig. 4-8. Utilizando el método del Art. 4.1-*B* se establece que la línea *DF*, perteneciente al plano *DEFG*, atraviesa el plano *ABC* en el punto *Y*. Igualmente, la línea *EG*, perteneciente al plano *DEFG* atraviesa al plano *ABC* en el punto *X*. Los puntos *X* y *Y* determinan la línea de intersección entre los dos planos, puesto que son dos puntos comunes a ambos planos.

Por medio de una cuidadosa visualización se determinará la visibilidad de las otras líneas pertenecientes al plano.

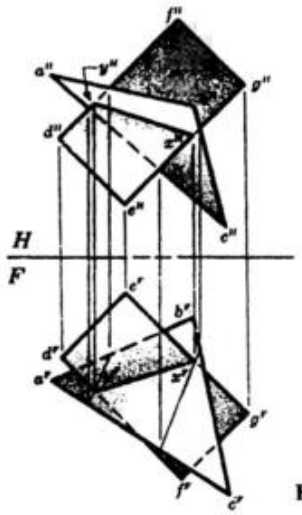


Fig. 4-8.

Intersección de dos planos oblicuos
[Método de los puntos de penetración (en dos vistas)]

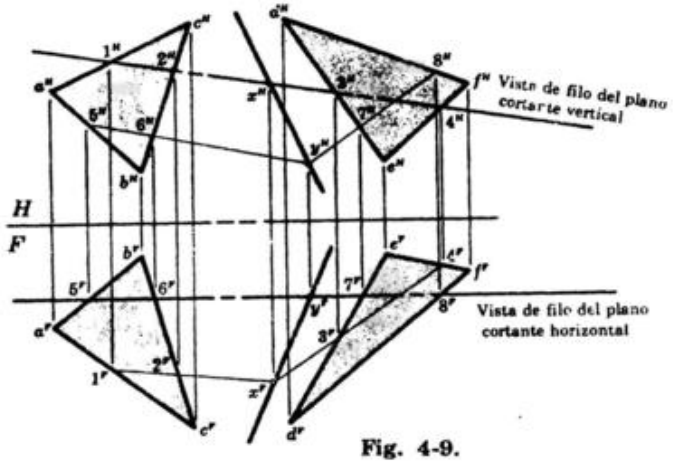


Fig. 4-9.

Intersección de dos planos oblicuos
[Método del plano cortante (en dos vistas)]

C. Método del plano cortante (en dos vistas)

Análisis: Si dos planos oblicuos dados son cortados por un tercer plano que aparece como un filo en una vista, los tres planos se tocarán en un punto común, a menos que el tercer plano sea paralelo a la intersección de los dos planos dados. El método usado para determinar la localización de dos o más puntos situados sobre la línea de intersección es el mismo que se explicó en el artículo correspondiente al método de la vista de filo.

Ejemplo: Los dos planos oblicuos *ABC* y *DEF* se dan en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Ver la Fig. 4-9. Un plano cortante vertical intersecta los dos planos dados en los puntos 1-2 y 3-4. Las líneas que pasan por 1 y 2 y por 3 y 4, respectivamente, se prolongan en la vista frontal para localizar el punto *X*, que es un punto común a ambos planos prolongados y, por tanto, está situado sobre la línea de intersección de estos dos planos. En la vista de planta el punto *X* se localiza proyectándolo a partir de la vista frontal, hasta la vista de filo del plano cortante.

Para localizar un segundo punto sobre la línea de intersección, un plano cortante horizontal intersecta los planos dados en los puntos 5-6 y 7-8. Las líneas que pasan por 5 y 6 y por 7 y 8, respectivamente, se prolongan en la vista de planta para localizar el punto *Y*, que es un punto común a ambos planos prolongados y por tanto, está situado sobre la línea de intersección de estos dos planos. Para localizar el punto *Y* en la vista frontal, simplemente proyecte hasta la vista de filo del plano cortante horizontal.

Problemas resueltos

1. Dado: El plano *ABC* y la línea *MN* en la Fig. 4-10. $A(1, 1, 4)$, $B(4, 1, 5\frac{1}{2})$, $C(3, 2\frac{1}{2}, 4)$, $M(1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4}, 5\frac{1}{4})$, $N(3\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 3\frac{3}{4})$. Ver en el Art. 1.7 la presentación de problemas por medio de coordenadas. Escala: $\frac{1}{4}'' = 1'—0''$.

Problema: Utilizando el método de la vista de filo, determine la intersección de la línea *MN* con el plano *ABC*. ¿Cuál será la distancia horizontal del punto *A* al punto de penetración? Muestre la visibilidad correcta.

Solución:

Utilizando los datos, dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal de la línea *MN* y del plano *ABC*. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 que muestre el plano *ABC* como un filo y la línea *MN* cortando al plano en el punto *P*. Proyecte el punto *P* a la vista de planta y a la vista de elevación frontal. Mida la distancia de *A* a *P* en la vista de planta, que es la distancia horizontal que se pide. Una cuidadosa visualización determinará la visibilidad correcta.

Resp. Distancia = $3'—7\frac{3}{4}''$

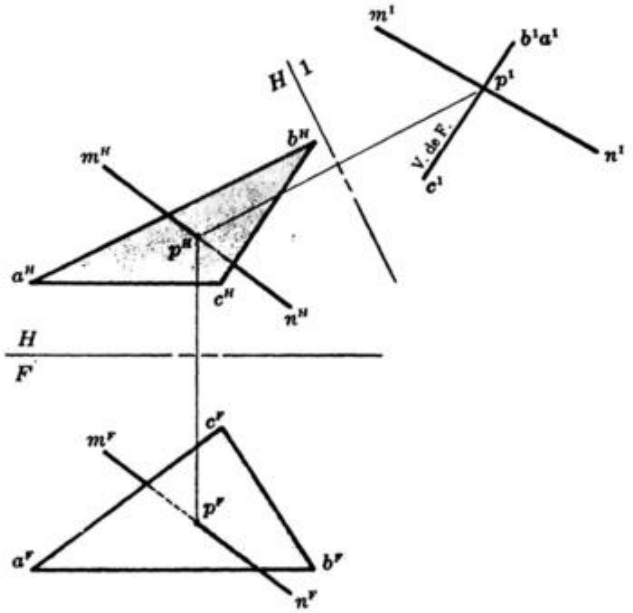


Fig. 4-10

2. Dado: Los puntos *A*, *B* y *C* representan una veta de mineral. El punto *Y* es la boca de un túnel que avanza hacia la vena hasta un punto *X*. El punto *B* está 24′ al este, 18′—6″ al norte y 15′—6″ por encima de *A*. El punto *C* está 41′—6″ al este, 13′ al sur y 21′ por debajo de *A*. El punto *X* está 46′ al este, 7′ al sur y 12′ por encima de *A*. El punto *Y* está 61′ al este, 13′ al sur y 18′ por encima de *A*. Ver la Fig. 4-11. Escala: $1'' = 40'$.

Problema: Determine cuánto se debe prolongar el túnel para que llegue hasta la veta de mineral.

Solución:

Utilizando los datos, dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal del plano *ABC* y de la línea *XY*. Muestre el plano *ABC* como un filo en una vista de elevación y proyecte la línea *XY* sobre esta misma vista. Prolongue la línea *XY* hasta que corte la vista de filo del plano. Proyecte el túnel completo a la vista de planta. Ahora que se tienen dos vistas de la línea que parte de *X* y llega hasta el plano, se puede dibujar una vista de elevación auxiliar para determinar la longitud verdadera de la distancia correspondiente. (Ver el Art. 4.1).

Resp. Distancia = 32′

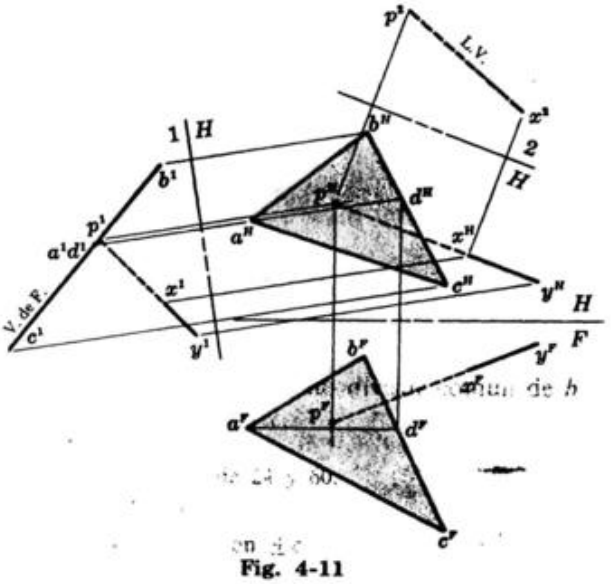


Fig. 4-11

3. Dado: Los planos *ABC* y *EFG* mostrados en la Fig. 4-12. El punto *B* está 2″ al este, 3″ al norte y 3″ por encima de *A*. El punto *C* está $2\frac{1}{2}$″ al este, 1″ al norte y 2″ por encima de *A*. El punto *E* está localizado $\frac{1}{2}$ ″ exactamente el norte y 2″ por encima de *A*. El punto *F* está $2\frac{1}{2}$″ exactamente al norte y 3″ por encima de *A*. El punto *G* está $2\frac{1}{2}$″ al este, $1\frac{1}{2}$ ″ al norte y 1″ por encima de *A*. Escala: $\frac{3}{4}$ ″ = 1″.

Problema: Utilizando el método de la vista de filo, determine el rumbo de la línea de intersección entre los dos planos.

Solución:

Utilizando los datos, dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal de los planos *ABC* y *EFG*. Dibuje una vista de elevación auxiliar que muestre ambos planos, uno de los cuales, *ABC*, aparece como un filo. En la vista de elevación auxiliar 1 localice dos puntos que sean comunes a ambos planos. Llame estos dos puntos *X* y *Y*. Proyecte los puntos *X* y *Y* a la vista de planta y a la vista frontal y únalos para localizar la línea de intersección en estas dos vistas. Mida el rumbo de la línea de intersección en la vista de planta. Una cuidadosa visualización determinará la visibilidad correcta. *Resp.* Rumbo = N 6° O

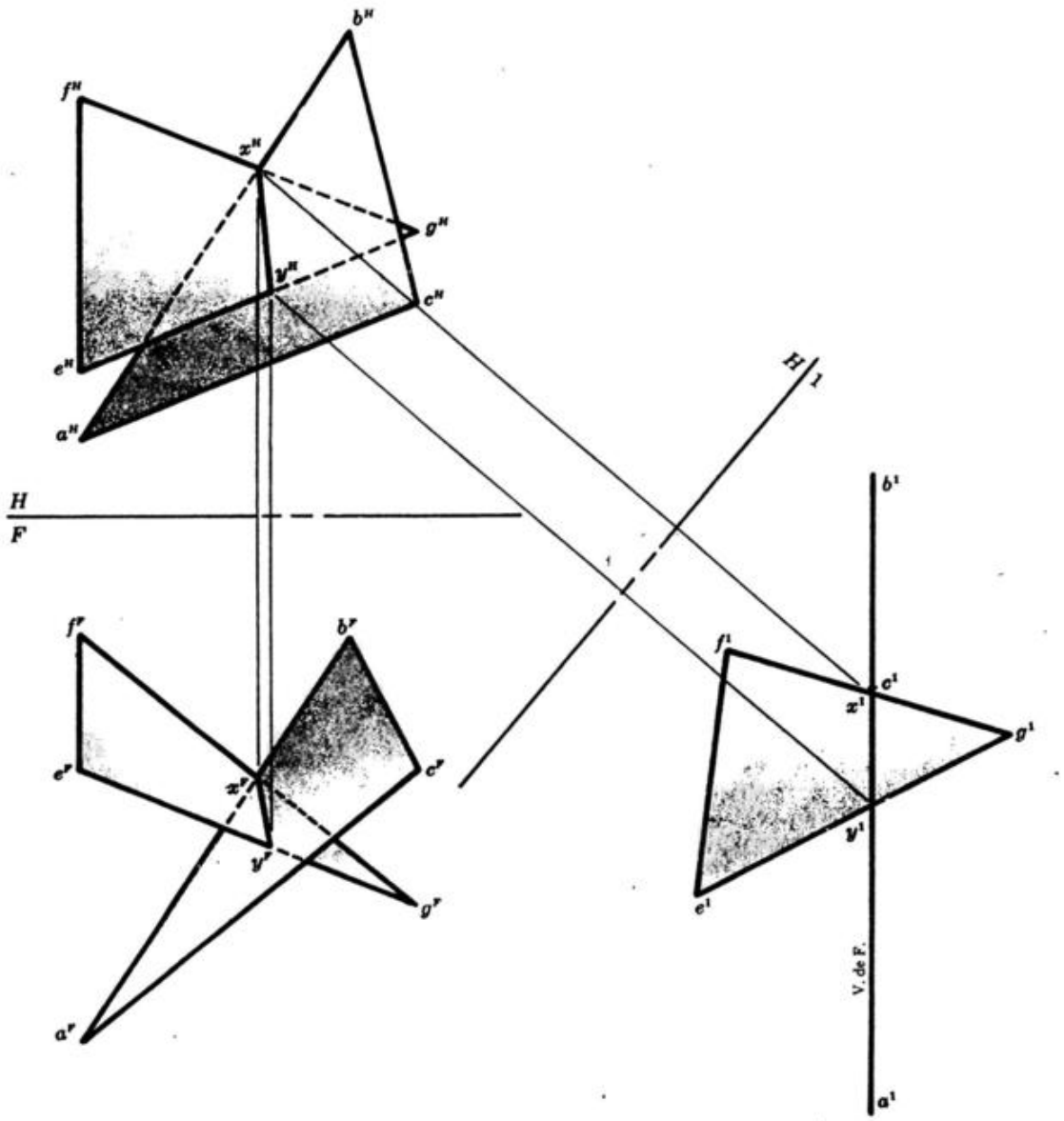


Fig. 4-12

4. Dado: La Fig. 4-13 muestra el plano de una parte de un techo y el extremo superior de una antena, punto X. Escala: $\frac{1}{16}'' = 1'—0''$.

Problema: Usando el método del plano cortante, determine la longitud verdadera de la antena vertical. Muestre la antena en la vista de elevación frontal.

Solución:

Usando el método del plano cortante del Art. 4.1-*B* trace una línea que pase por el punto X, en la vista de planta. Esta línea representa la vista de planta de un plano cortante vertical, así como también la intersección de este plano vertical con el plano del techo. Llame los puntos de intersección de este plano cortante con las líneas AD y BC, E y F, respectivamente. Proyecte los puntos E y F a sus correspondientes posiciones en la vista frontal. Una los puntos E y F en esta vista. A partir del punto X baje una línea perpendicular hasta encontrar la línea EF, en la vista frontal. Llame este punto de intersección, Y. La línea XY, en la vista frontal, es la longitud verdadera de la antena.

Resp. L.V. = 7'—6"

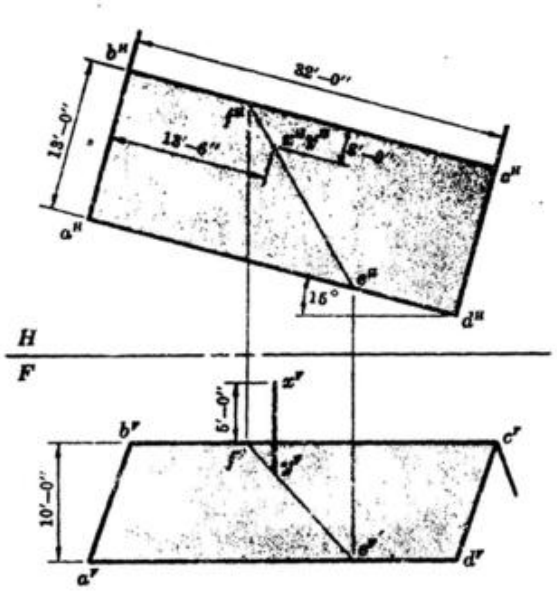


Fig. 4-13

5. Dado: Los planos ABC y $DEFG$ mostrados en la Fig. 4-14. $A(\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{4})$, $B(3\frac{1}{2}, 3, 6\frac{3}{4})$, $C(2\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 4\frac{3}{4})$, $D(2, 3\frac{1}{4}, 5\frac{3}{4})$, $E(3, 3\frac{1}{4}, 5)$, $F(2, 1, 6\frac{1}{4})$, $G(1, 1, 7)$. Ver en el Art. 1.7 la presentación de problemas por medio de coordenadas.

Problema: Usando el método de la vista de filo, muestre la intersección de los dos planos en todas las vistas. Determine el rumbo de la línea de intersección.

Solución:

Usando los datos, localice la vista de planta y la vista de elevación frontal de ambos planos. Dibuje una vista de elevación auxiliar que muestre ambos planos, uno de los cuales, $DEFG$, aparece como un filo. En la vista de elevación auxiliar 1 localice dos puntos, X y Y, que están situados en la línea de intersección. Proyecte X y Y, a la vista de planta para determinar el rumbo de la línea de intersección. Usted observará que en la vista de planta la línea de intersección se extenderá desde el punto Y hasta la intersección con la línea EF. Llame este punto de intersección, Z. Proyecte Y y Z a sus posiciones correspondientes en la vista frontal. Haga una cuidadosa visualización para determinar la visibilidad correcta.

Resp. Rumbo = N 64° O

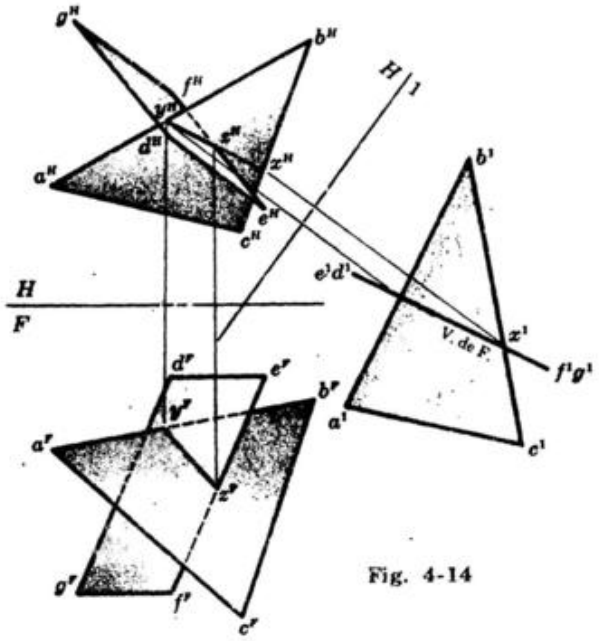


Fig. 4-14

6. Dado: El plano $ABCD$ es cortado por un cable de mando, XY. El punto B está localizado 100′ exactamente al este y 50′ por debajo de A. El punto C está localizado 75′ exactamente al sur y 65′ por debajo de A. El punto D está localizado 100′ al este, 75′ al sur y 115′ por debajo de A. El punto X está 20′ al oeste, 25′ al sur y 120′ por debajo de A. El punto Y está

localizado 120′ al este, 25′ al sur y 25′ por encima de *A*. Ver la Fig. 4-15. Escala: 1″ = 100′.

Problema: Localice el punto de penetración del cable de mando en el plano, utilizando el método de la vista de filo. Determine la longitud verdadera y el rumbo de una línea que parte de *A* y llega hasta el punto de penetración. ¿A qué distancia, por debajo de *A*, está el punto de penetración?

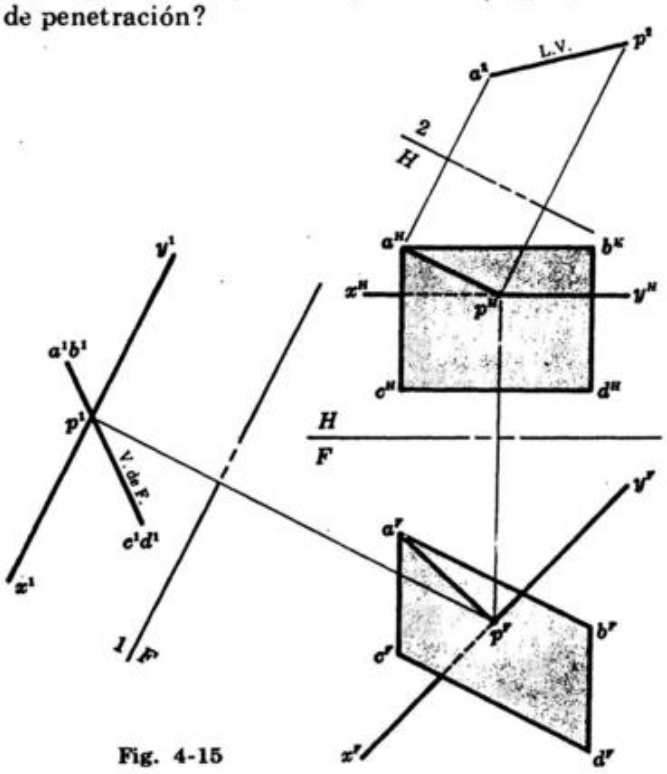


Fig. 4-15

Solución:

Dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal de la línea *XY* y del plano *ABCD*. Dibuje una vista inclinada que muestre el plano como un filo y la línea *XY* cortando el plano en el punto *P*. Proyecte el punto *P* a la vista de elevación frontal y a la vista de planta. Trace una línea desde *A* hasta *P*, en la vista de planta. Mida el rumbo de la línea *AP* en esta vista. Dibuje una vista de elevación auxiliar 2 para obtener la longitud verdadera de *AP*. Mida la diferencia de elevaciones entre *A* y *P* en la vista frontal o bien en la vista de elevación auxiliar 2. Muestre la visibilidad correcta de la línea y el plano por medio de una cuidadosa visualización.

Resp. L.V. = 73′—6″, rumbo = S 63°30′ E, elevación de *P* = 40′ más baja que *A*

7. Dado: Un túnel de una mina es abierto en la dirección *XY* hacia una veta de carbón, representada por el plano *ABC*, como se muestra en la Fig. 4-16. El punto *B* está 80′ al este, 80′ al norte y 80′ por debajo de *A*. El punto *C* está localizado 120′ exactamente al este y 40′ por encima de *A*. El punto *X* está 10′ al oeste, 50′ al norte y 50′ por encima de *A*. El punto *Y* está 40′ al este, 15′ al norte y 25′ por encima de *A*. Escala: 1″ = 100′.

Problema: ¿Cuánto tiempo les tomará a los mineros llegar hasta la veta de carbón si parten del punto *X* y avanzan a una velocidad media de 12′ por hora? ¿Cuál es la longitud total del túnel necesaria para llegar hasta la veta?

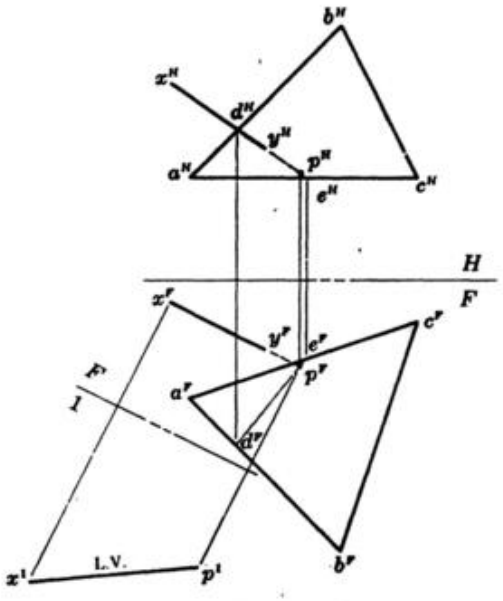


Fig. 4-16

Solución:

Usando los datos, dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal del plano *ABC* y del túnel *XY*. Como se explicó en el Art. 4.1-*B*, el método del plano cortante se usa para determinar los puntos *D* y *E* en ambas vistas. La intersección de la línea *DE*, en la vista frontal, con la línea *XY* prolongada, localizará el punto de penetración *P*. Proyecte el punto *P* a la vista de planta. Dibuje una vista inclinada 1 para encontrar la longitud verdadera del túnel completo. Divida la longitud verdadera de *XP* por 12 para determinar el tiempo total que se necesita para llegar a la veta. *Resp.* L.V. = 89′, tiempo = 7 horas 25 minutos

8. Dado: Una pirámide recta con su base cuadrada *ABCD* y su vértice en *O* y una línea *XY* que pasa a través de la pirámide, como se muestra en la Fig. 4-17. *A*(3, 3, 7), *B*(4, 3, 8), *C*(5, 3, 7), *D*(4, 3, 6), *O*(4, 5, 7), *X*(3, $3\frac{1}{2}$, 8), *Y*($5\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, 6). Ver en el Art. 1.7 la presentación de problemas por medio de coordenadas. Escala: $\frac{1}{2}'' = 1''$.
Problema: Determine la distancia verdadera entre los puntos de penetración de la línea *XY*. Use únicamente dos vistas y muestre la visibilidad correcta.

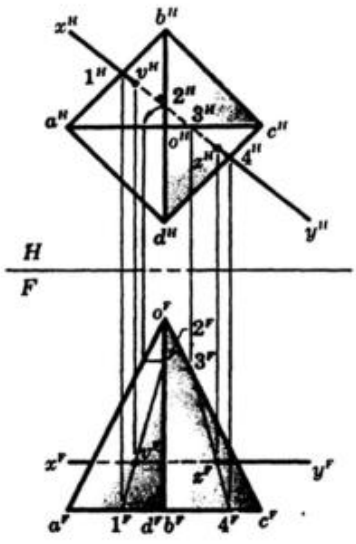


Fig. 4-17

Solución:

Usando las coordenadas dadas, construya la vista de planta y la vista de elevación frontal de la pirámide y de la línea. Por medio del método del plano cortante del Art. 4.1-*B* se determinan los puntos de penetración *V* y *Z* en la vista frontal. Proyecte los puntos *V* y *Z* a partir de la vista frontal hasta la línea *XY*, en la vista de planta. De este modo quedan localizados los puntos de penetración *V* y *Z* en la vista de planta. Puesto que la línea *XY* es una línea de nivel, la distancia entre los puntos *V* y *Z* está en su longitud verdadera en la vista de planta. Una cuidadosa visualización determinará la visibilidad correcta.

Resp. L.V. = $1\frac{1}{16}''$

Problemas propuestos

9. En cada uno de los siguientes casos determine el punto de intersección entre el plano *ABC* y la línea *XY*. Use el método de la vista de filo. Muestre la visibilidad correcta. Utilice una escala de $1'' = 10'$ y determine la distancia horizontal desde el punto *A* hasta el punto de penetración. Ver en el Art. 1.7 la presentación de problemas por medio de coordenadas.

(*a*) *A*(1, $2\frac{1}{2}$, 4) *B*($1\frac{1}{2}$, 1, 6), *C*($3\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, 5), *X*(1, $1\frac{1}{2}$, 6), *Y*($3\frac{1}{2}$, 1, 4) *Resp.* 16′—4″

(*b*) *A*($1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, 5), *B*($2\frac{1}{2}$, 3, $6\frac{1}{2}$); *C*(4, 1, $4\frac{1}{2}$), *X*($3\frac{1}{2}$, 1, 6), *Y*($2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$) *Resp.* 15′—6″

(*c*) *A*(1, 1, 6), *B*($2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, 5), *C*($3\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$). *X*(2, $\frac{1}{2}$, 5), *Y*($3\frac{1}{2}$, 2, 7) *Resp.* 17′—0″

(*d*) *A*($1\frac{1}{2}$, 3, 7), *B*($2\frac{1}{2}$, 1, 5), *C*($3\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$), *X*($1\frac{1}{2}$, 1, $5\frac{1}{2}$), *Y*(3, $2\frac{1}{2}$, 7) *Resp.* 11′—10″

(*e*) *A*(1, 3, $5\frac{1}{2}$), *B*(3, 3, 5), *C*(4, $1\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$), *X*(2, 2, 5), *Y*($3\frac{1}{2}$, 3, $5\frac{1}{2}$) *Resp.* 20′—7″

10. La línea *XY* y el plano *ABC* se determinan así: *A*(1, 1, 4), *B*(4, 1, $5\frac{1}{2}$), *C*(3, $2\frac{1}{2}$, 4), *X*($1\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{4}$), *Y*($3\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$, $3\frac{3}{4}$). Ver en el Art. 1.7 la presentación de problemas por medio de coordenadas. Usando el método del plano cortante en dos vistas encuentre las coordenadas aproximadas del punto de penetración de la línea *XY* en el plano *ABC*. *Resp.* Punto de penetración = ($2\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$)

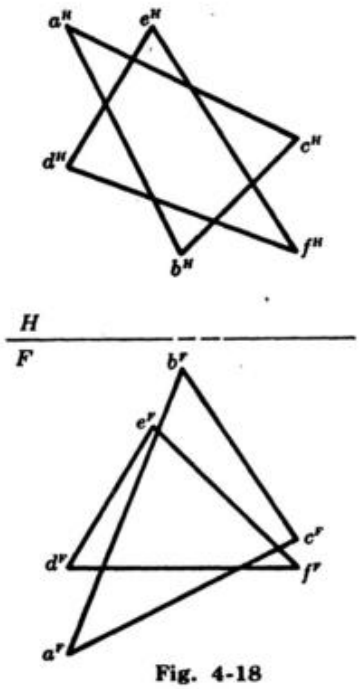


Fig. 4-18

11. Dos planos, *ABC* y *DEF*, se muestran en la Fig. 4-18. $A(1, 1, 6\frac{1}{2})$, $B(2, 3\ \ , 4\frac{1}{2})$, $C(3, 2, 5\ \ )$, $D(1, 1\frac{3}{4}, 5\frac{1}{4})$, $E(1\frac{3}{4}, 3, 6\frac{1}{2})$, $F(3, 1\frac{3}{4}, 4\frac{1}{2})$. Determine la intersección de los dos planos. Muestre la visibilidad correcta. ¿Cuál es el rumbo de la línea de intersección? *Resp.* Rumbo = N 77° O

12. Una lámina doblada, *ABCD*, está localizada así: El punto *B* está 10' al este, 15' al norte y 25' por debajo de *A*. El punto *C* está 40' al este, 10' al norte y 15' por debajo de *A*. El punto *D* está 35' al este, 10' al sur y 5' por encima de *A*. La "línea de doblez" es *AC*. Ver la Fig. 4-19. Un cable *XY* debe pasar a través de la lámina doblada. El punto *X* está 10' al norte, 8' al oeste y 10' por debajo de *A*. El punto *Y* está 40' al este, 5' al sur y 5' por debajo de *A*. Escala: 1" = 10'. Usando únicamente dos vistas, determine el punto, o los puntos, donde el cable atraviesa la lámina. ¿Cuál es la diferencia de elevación entre el punto (o los puntos) de penetración y *A*?

Resp. El punto de penetración está 8'—6" más bajo que *A*

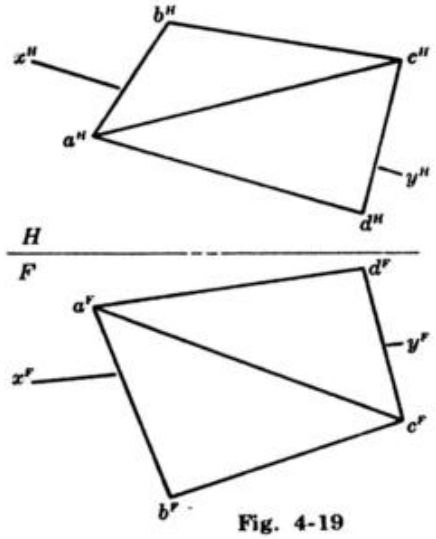


Fig. 4-19

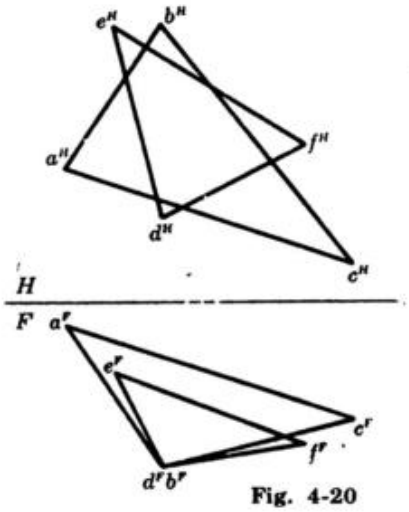
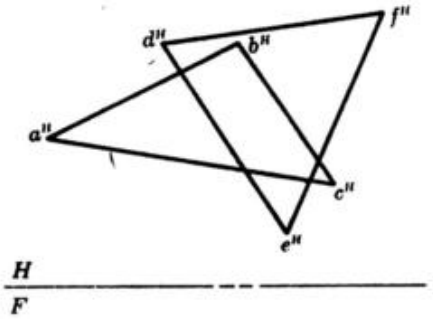


Fig. 4-20

13. Los dos planos *ABC* y *DEF* mostrados en la Fig. 4-20, se cortan. El punto *B* está 6' al norte, 4' al este y 6' por debajo de *A*. El punto *C* está 4' al sur, 12' al este y 4' por debajo de *A*. El punto *D* está 2' al sur, 4' al este y 6' por debajo de *A*. El punto *E* está 6' al norte, 2' al este y 2' por debajo de *A*. El punto *F* está 1' al norte, 10' al este y 5' por debajo de *A*. Escala: $\frac{1}{4}$" = 1'—0". Usando el método de la vista de filo, muestre la línea de intersección entre los dos planos. Determine la visibilidad en la vista de planta y en la vista frontal. ¿Cuál es el rumbo de la línea de intersección? *Resp.* Rumbo = N 68° O

14. El plano *ABC* es cortado por una línea de nivel *XY*. El punto *B* está 10' al este, 20' al norte y 15' por debajo de *A*. El punto *C* está 30' al este, 5' al norte y 10' por encima de *A*. La línea *XY* está a una elevación de 3' por debajo de *A*, con el punto *X* localizado 2' exactamente al norte de *A* y el punto *Y* localizado 3' exactamente al sur de *C*. Escala: 1" = 10'. Determine el punto de penetración de la línea *XY* con el plano *ABC*. ¿Cuál es el rumbo de una línea trazada desde el punto de penetración hasta *A*?

Resp. Rumbo = S 45° E



15. Dos planos, *ABC* y *DEF* se intersectan. Ver la Fig. 4-21. El punto *B* está 20' al este, 10' al norte y 25' por encima de *A*. El punto *C* está 30' al este, 5' al sur y 10' por encima de *A*. El punto *D* está 12' al este, 10' al norte y 20' por encima de *A*. El punto *E* está 25' al este, 10' al sur y 5' por encima de *A*. El punto *F* está 35' al este, 13' al norte y 10' por encima de *A*. Escala: 1" = 10'. Localice la línea de intersección entre los dos planos dados y muestre esta línea tanto en la vista de planta como en la vista frontal. Determine la visibilidad de los planos en todas las vistas. ¿Cuál es el rumbo de la línea de intersección? Use el método de la vista de filo.

Resp. Rumbo = N 42° O

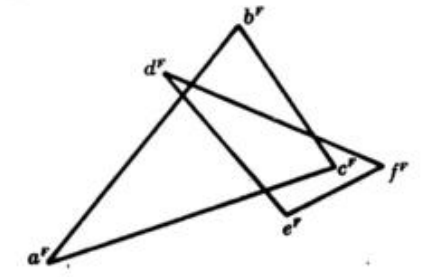


Fig. 4-21

16. Un marco rectangular *ABCD* está soportado por dos puntales de madera, *EF* y *GH*. Determine los puntos donde los puntales pasan a través del plano *ABCD*. ¿Cuánto debe quitarse a cada uno de los puntales si estos no deben prolongarse más allá del plano del marco? Ver la Fig. 4-22. El punto *B* está 4′ al este, 3′ al norte y 8′ por encima de *A*. El punto *C* está 13′ al este, 9′ al sur y 8′ por encima de *A*. El punto *D* está localizado 9′ al este, 12′ al sur y a la misma elevación que *A*. El punto *E* está 1′—6″ al este, 6″ al sur y 8′—9″ por encima de *A*. El punto *F* está 7′—6″ al este, 4′ al norte y a la misma elevación que *A*. El punto *G* está 9′ al este, 10′—6″ al sur y 8′—9″ por encima de *A*. El punto *H* está 15′ al este, 6′ al sur y a la misma elevación que *A*. Escala: $\frac{1}{4}'' = 1'—0''$. *Resp.* Se deben quitar 3′—10″

17. Dos planos, *ABCD* y *EFG*, se cortan. $A(2, 5, 5)$, $B(2, 2, 8)$, $C(5, 4, 8)$, $D(5, 4, 5)$, $E(2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$, $F(3\frac{1}{2}, 2, 7\frac{1}{2})$, $G(4\frac{1}{2}, 3, 5\frac{1}{2})$. Determine el rumbo de la línea de intersección entre los dos planos. Muestre la visibilidad completa. *Resp.* Rumbo = N 30°30′ O

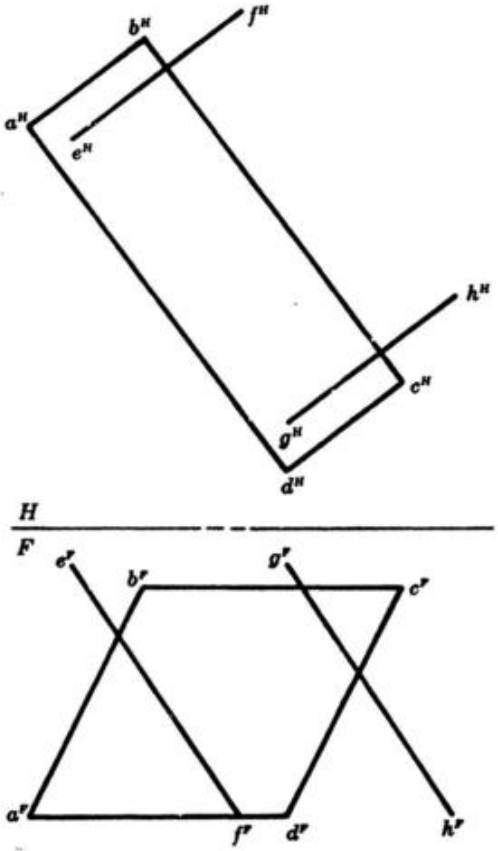


Fig. 4-22

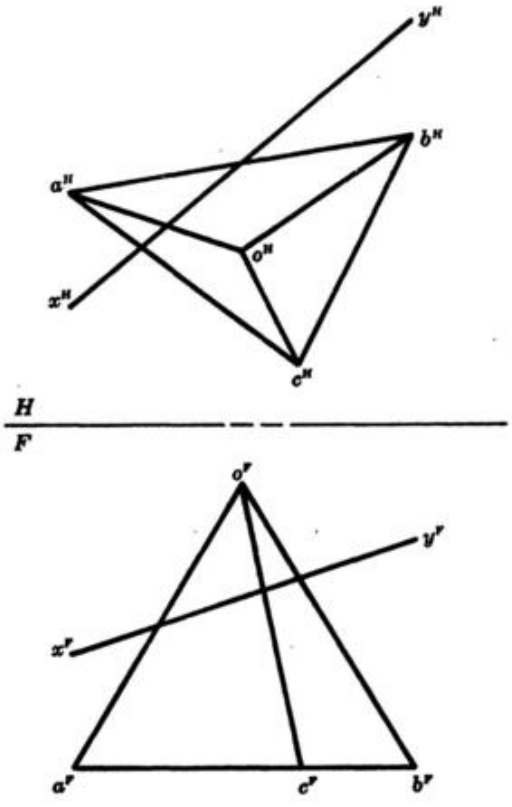


Fig. 4-23

18. Una pirámide con base *ABC* y vértice *O* se muestra en la Fig. 4-23. Una línea *XY* atraviesa la pirámide. El punto *B* está 12′ al este, 2′ al norte y a la misma elevación que *A*. El punto *C* está 8′ al este, 6′ al sur y a la misma elevación que *A*. El punto *O* está 6′ al este, 2′ al sur y 10′ por encima de *A*. El punto *X* está 4′ exactamente al sur y 4′ por encima de *A*. El punto *Y* está 12′ al este, 6′ al norte y 8′ por encima de *A*. Escala: $\frac{1}{4}'' = 1'—0''$. Muestre la intersección de la línea *XY* con la pirámide en la vista de planta y en la vista frontal. Si el punto *X* se localiza 2′ más hacia el sur, ¿cuál sería la distancia entre los puntos de penetración de la nueva línea *XY*? *Resp.* L.V. = 1′—6″

19. El plano *ABC* y la línea *XY* se localizan así: $A(1, 1\frac{1}{2}, 4)$, $B(2\frac{1}{4}, 2\frac{3}{4}, 5\frac{3}{4})$, $C(4, 1, 4)$, $X(1, 1\frac{1}{4}, 5\frac{1}{2})$, $Y(2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, 3\frac{1}{2})$. Determine las coordenadas aproximadas del punto de intersección de la línea *XY* con el plano *ABC*. *Resp.* Punto de penetración $(1\frac{3}{4}, 1\frac{3}{4}, 4\frac{1}{2})$

20. Una veta de mineral está determinada por el plano *ABC*. Un túnel ascendente, *XY*, es dirigido hacia la veta de mineral. Ver la Fig. 4-24. El punto *B* está 100′ al este, 75′ al sur y 85′ por encima de *A*. El punto *C* está 200′ al este, 50′ al norte y 25′ por encima de *A*. El punto *X* está 150′ al este, 50′ al sur y 25′ por debajo de *A*. El punto *Y* está 250′ al este, 90′ al sur y 75′ por debajo de *A*. Escala: 1″ = 50′. ¿Cuánto se debe prolongar el túnel para llegar hasta la veta de mineral? *Resp.* 116′

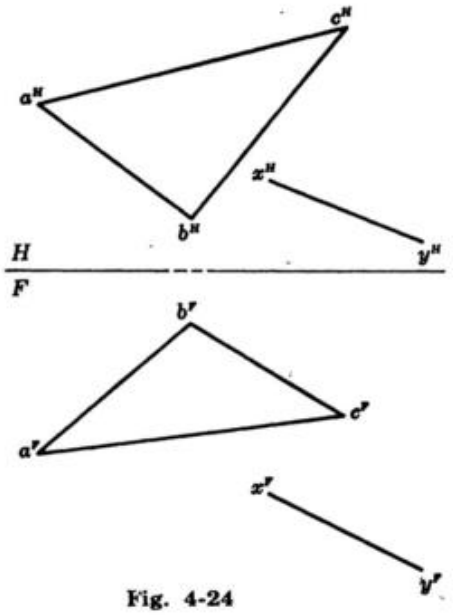


Fig. 4-24

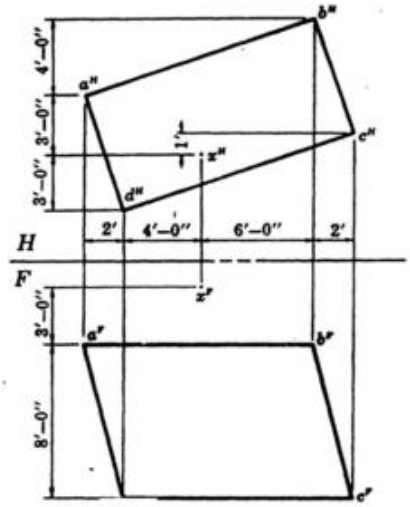


Fig. 4-25

21. La base horizontal de una pirámide está representada por un triángulo equilátero de 3" de lado. Las tres caras laterales de la pirámide forman ángulos de 45°, 60° y 75° respectivamente, con el plano de la base. Construya una vista de planta y las vistas de elevación que necesite de la pirámide para determinar su altura. Escala: 12" = 1'—0". *Resp.* Altura = $1\frac{7}{16}$"

22. Dos planos, *ABCD* y *EFG*, se intersectan. *A*(2, 4, 6), *B*(2, 2, 6), *C*(5, 4, $7\frac{1}{2}$), *D*(5, 2, $7\frac{1}{2}$), *E*($2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$), *F*($3\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, 6), *G*(5, 3, $6\frac{1}{2}$). Ver en el Art. 1.7 el sistema de coordenadas para la presentación de problemas. Determine el rumbo de la línea de intersección. Muestre la visibilidad completa.
Resp. Rumbo = N 64° E

23. La Fig. 4-25 muestra la vista de planta y la vista de elevación frontal de una parte de un techo, *ABCD*. El punto *X* representa el extremo superior de una antena de televisión. Usando únicamente dos vistas, determine la longitud verdadera de la antena vertical. Escala: $\frac{1}{4}$" = 1'—0".
Resp. L.V. = 9'—0"

24. Los planos *RST* y *UVW* se dan en la Fig. 4-26. El punto *S* está 2" al este, 3" al norte y 3" por encima de *R*. El punto *T* está $2\frac{1}{2}$" al este, 1" al norte y 2" por encima de *R*. El punto *U* está localizado $\frac{1}{2}$" exactamente al norte y 2" por encima de *R*. El punto *V* está $2\frac{1}{2}$" exactamente al norte y 3" por encima de *R*. El punto *W* está $2\frac{1}{2}$" al este, $1\frac{1}{2}$" al norte y 1" por encima de *R*. Escala: 12" = 1'—0". Determine la línea de intersección entre los dos planos utilizando el método del plano cortante en dos vistas. ¿Cuál es el rumbo de la línea de intersección? *Resp.* Rumbo = N 6° O

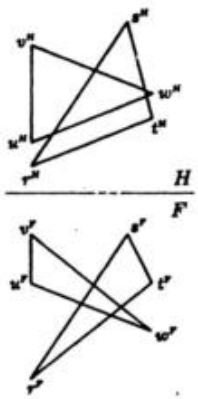


Fig. 4-26

Capítulo 5

Perpendicularidad: Líneas y planos

5.1 PROYECCION DE UN PUNTO SOBRE UN PLANO

Análisis: Una línea perpendicular al plano, trazada desde el punto, determinará la proyección del punto sobre el plano. Por tanto, es necesario localizar la intersección de la línea perpendicular con el plano.

Ejemplo: En la Fig. 5-1 se da el plano *ABC* y el punto *X* en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. El problema pide localizar la proyección del punto *X* sobre el plano *ABC*. El primer paso es encontrar la perpendicular al plano, trazada desde el punto. Trace las líneas en verdadera longitud *AD* (horizontal) y *AE* (frontal) en la vista de planta y en la vista de elevación frontal, respectivamente. Las líneas *AD* y *AE* se trazan en base al teorema geométrico que expresa que una línea es perpendicular a un plano, si es perpendicular a dos líneas no paralelas situadas en el plano. A partir del punto *X*, en ambas vistas, trace una línea de longitud indefinida, perpendicular a la línea en verdadera longitud. El segundo paso es localizar la intersección de esta línea perpendicular con el plano dado. Suponga un plano cortante vertical que contenga a la perpendicular que parte de *X*, en la vista de planta. La intersección del plano cortante con el plano *ABC* tiene lugar a lo largo de la línea *YZ*. La intersección de *YZ* con la perpendicular que parte de *X*, en la vista frontal, localizará la proyección del punto sobre el plano. La vista de planta de este punto se obtiene por simple proyección desde la vista de elevación frontal.

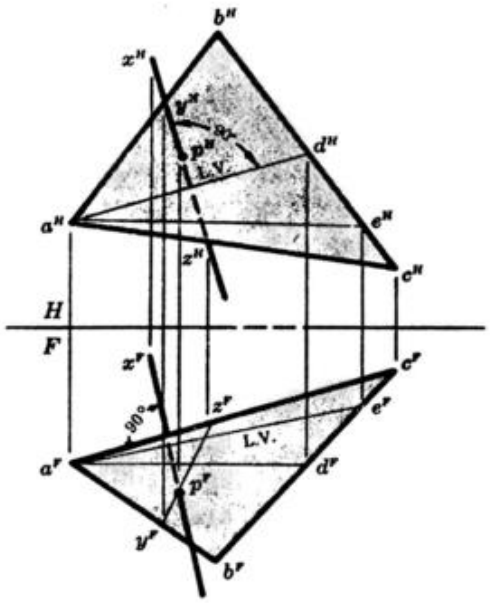


Fig. 5-1.
Proyección de un punto sobre un plano

5.2 PROYECCION DE UNA LINEA SOBRE UN PLANO

Análisis: La proyección de una línea sobre un plano se basa en el mismo principio expuesto en el artículo precedente. Se señaló que la proyección de un punto sobre un plano es el punto en el cual una perpendicular al plano, trazada desde el punto, corta al plano. La proyección de una línea sobre un plano se determina sencillamente proyectando dos puntos cualesquiera de la línea, sobre el plano dado. Una vez que se han determinado las proyecciones de los dos puntos, se traza una línea a través de ellos para obtener la proyección de la línea sobre el plano.

Ejemplo 1: (Método del plano cortante, en dos vistas) En la Fig. 5-2 se da el plano *ABC* y la línea *XY* en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Trace las líneas en verdadera longitud *AD* y *CE* en la vista de planta y en la vista frontal, respectivamente. A partir de los puntos *X* y *Y* trace perpendiculares a las líneas en verdadera longitud, en ambas vistas. Suponga dos planos cortantes verticales que contengan a las perpendiculares que parten de *X* y de *Y*, respectivamente, en la vista de planta. Las intersecciones de los planos cortantes con los planos dados tienen lugar a lo largo de las líneas *ST* y *UV*. La intersección de *ST* con la perpendicular que parte de *X*, en la vista frontal, localizará la proyección del punto *X* en esta vista. Llame este punto, *P*. La intersección de *UV* con la perpendicular que parte de *Y*, en la vista frontal, localizará la proyección del punto *Y* en esta vista. Llame

este punto, Q. Determinadas ya las proyecciones de X y de Y, simplemente una los puntos P y Q en la vista frontal, para determinar la línea pedida. La vista de planta de los puntos P y Q se obtiene por simple proyección a la vista de planta.

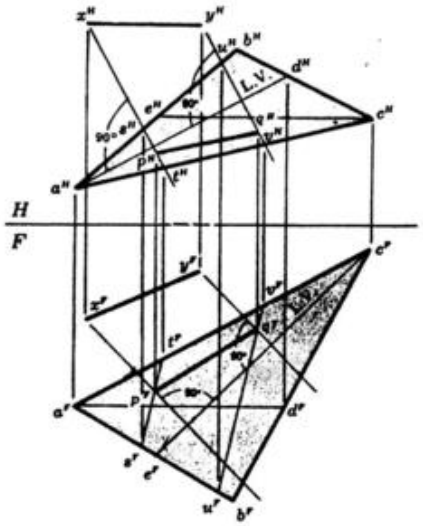


Fig. 5-2.
Proyección de una línea sobre un plano
(Método del plano cortante, en dos vistas)

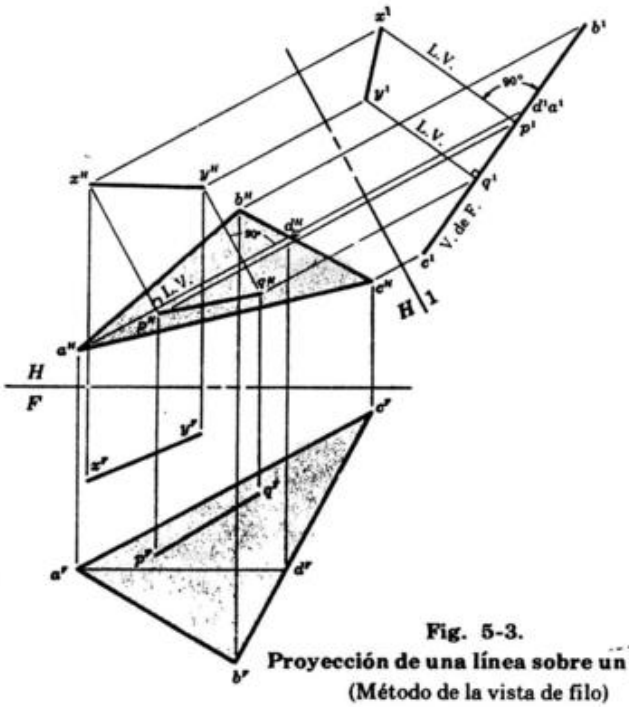


Fig. 5-3.
Proyección de una línea sobre un plano
(Método de la vista de filo)

Ejemplo 2: (Método de la vista de filo) En la Fig. 5-3 se da el plano ABC y la línea XY en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Dibuje una vista de elevación auxiliar que muestre el plano como un filo, así como también la línea XY. Trace a partir de los extremos de la línea XY dos líneas de proyección perpendiculares a la vista de filo del plano. Las intersecciones de estas líneas de proyección con el plano, llámelas P y Q, respectivamente. La vista de elevación auxiliar 1 muestra estas líneas de proyección en sus verdaderas longitudes, de modo que deben aparecer paralelas a la línea de pliegue H-1, en la vista de planta. Proyecte los puntos P y Q a la vista de planta, hasta cortar las proyecciones de X y de Y que son paralelas a la línea de pliegue H-1. Estas intersecciones determinarán la vista de planta de la proyección de la línea dada sobre el plano ABC. Por simple proyección y traslado de distancias se localiza la vista frontal de la proyección de la línea dada sobre el plano.

5.3 DISTANCIA MAS CORTA DE UN PUNTO A UNA LINEA

A. Método lineal

Análisis: La distancia más corta de un punto a una línea es la distancia perpendicular. Cuando la línea dada aparece en su verdadera longitud, la distancia más corta aparecerá como una perpendicular a ella. Si se dibuja una vista que muestre la línea como un punto, la distancia que se pide aparecerá en su verdadera longitud.

Ejemplo: La Fig. 5-4 muestra la línea AB y el punto C en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Para determinar la distancia más corta entre el punto C y la línea AB, antes que todo mostramos la línea AB en su longitud verdadera, ya sea en una vista de elevación auxiliar (como se hace en este ejercicio), o en una vista inclinada, proyectada a partir de la vista frontal. La distancia más corta aparecerá en esta vista como la perpendicular a la línea AB, trazada a partir del punto C. Llame este punto de intersección, D.

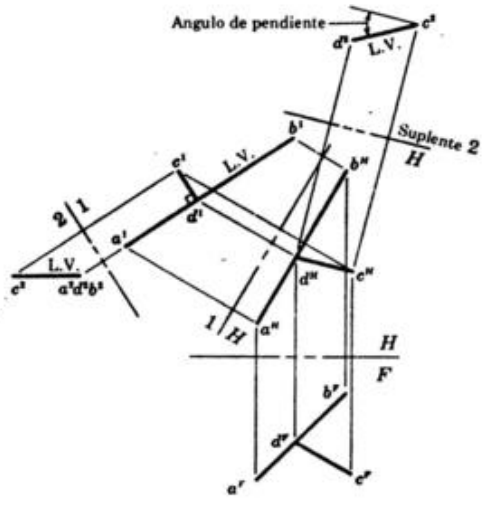


Fig. 5-4

Para obtener la longitud verdadera de la distancia más corta *CD*, dibuje una vista inclinada que muestre la línea *AB* como un punto. Puesto que la línea de pliegue 1-2 es paralela a *CD* en la vista 1, la vista 2 mostrará la distancia más corta en su verdadera longitud. Proyecte el punto *D* a las otras vistas.

Nota: Si el problema pide además que se halle la pendiente de la distancia más corta, se omitirá la vista 2 y en su lugar se dibujará una vista de elevación auxiliar para determinar tanto la longitud verdadera como la pendiente de la distancia más corta. Por supuesto, antes de aplicar este procedimiento, se hallará la localización del punto *D* sobre la línea *AB*, en la vista de planta. El rumbo de la distancia más corta aparecerá en la vista de planta.

B. Método del plano

Análisis: Una línea y un punto que no esté situado sobre esta línea determinan un plano. Si el plano se muestra en su verdadero tamaño, la distancia más corta entre el punto y la línea es la perpendicular a la línea, trazada desde el punto.

Ejemplo: Usando los mismos datos del ejemplo del método lineal, la Fig. 5-5 muestra la línea *AB* y el punto *C* en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Una los puntos *A* y *B* con el punto *C*, para formar el plano *ABC*. Primero que todo, muestre el plano como un filo y luego, en su verdadero tamaño. Trace una perpendicular a la línea *AB* desde el punto *C*. Llame el punto de intersección, *D*. En la vista 2, *CD* es la longitud verdadera de la distancia más corta desde el punto *C* hasta la línea *AB*.

Nota: Como en la Fig. 5-4, si se pide la pendiente de la distancia más corta, entonces, después de proyectar la línea *CD* a la vista de planta (a partir de la vista 1), debe dibujarse una vista de elevación auxiliar que muestre la pendiente de la distancia más corta, a la vez que verifica la longitud verdadera, hallada en 2. El rumbo de la distancia más corta se mostrará en la vista de planta.

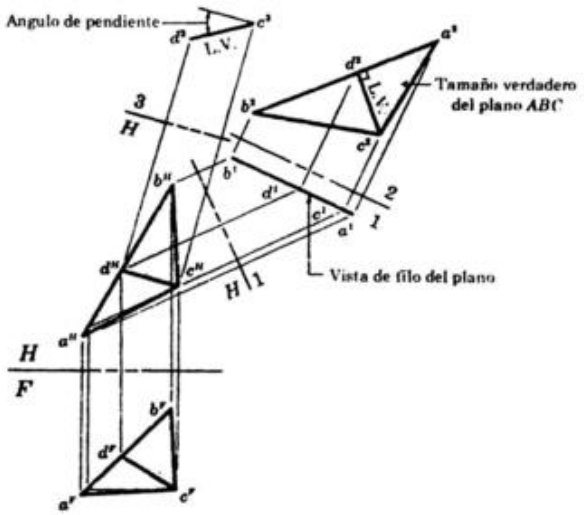


Fig. 5-5.

Distancia más corta de un punto a una línea
(Método del plano)

5.4 TRAZAR UNA LINEA PERPENDICULAR A UN PLANO

A. Método de la vista de filo

Análisis: Una vista que muestre el plano como un filo, mostrará la longitud verdadera de una línea perpendicular al plano. Puesto que esta vista muestra la distancia perpendicular en su verdadera longitud, la vista relacionada mostrará la línea perpendicular, paralela a la línea de pliegue. El punto donde la línea perpendicular atraviesa el plano dado, será evidente en la vista de filo y su localización en otras vistas se determina por simple proyección.

Ejemplo: En la Fig. 5-6 se da el plano *ABC* y el punto *X* en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. La vista de elevación auxiliar muestra el plano *ABC* como un filo. Desde el punto *X*, en esta vista, se traza una línea perpendicular a la vista de filo del plano. Esta línea perpendicular atraviesa el plano en *Y*. La línea *XY* aparecerá paralela a *H*-1 en la vista de planta, puesto que está en su verdadera longitud en la vista 1. El punto *Y* se obtiene en la vista frontal, por simple proyección.

B. Método de las dos vistas

Análisis: Un teorema geométrico nos dice que si una línea es perpendicular a un plano, es perpendicular a todas las líneas contenidas en el plano. Por tanto, la línea perpendicular que se pide aparecerá perpendicular a cualquier línea en verdadera longitud situada en el plano, que se muestre en esa vista particular. El punto de penetración de esta línea perpendicular puede determinarse por los métodos expuestos en el Art. 4.1.

Ejemplo: En la Fig. 5-7 se da el plano *ABC* y el punto *X* en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. La línea de nivel *AD* se traza en la vista frontal y se proyecta a la vista de planta, donde establece la dirección de todas las líneas en longitud verdadera situadas sobre el plano, en esta vista. La línea trazada desde *X* debe ser perpendicular a esta línea en verdadera longitud. En la vista de planta se traza una línea frontal *AE* y se proyecte a la vista frontal, donde establece la dirección de todas las líneas en longitud verdadera situadas sobre el plano, en esta vista. De nuevo, la línea que parte de *X* debe ser perpendicular a la línea en verdadera longitud. Puesto que la dirección de la línea perpendicular al plano ha sido establecida en dos vistas, el punto de penetración *Y* se determinará por el método del Art. 4.1-*B*.

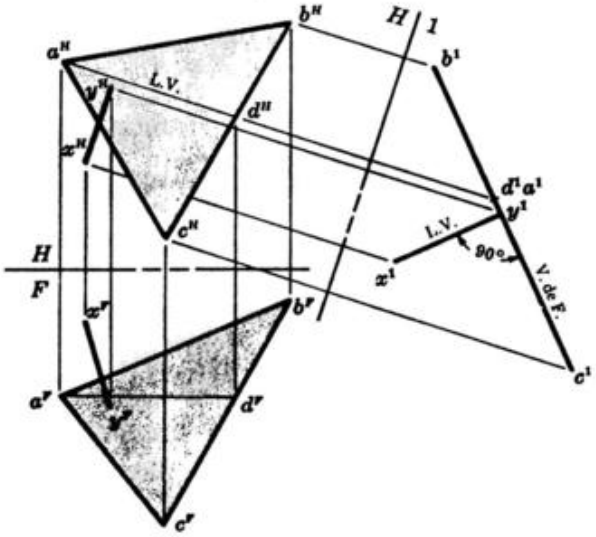


Fig. 5-6. Línea perpendicular a un plano
(Método de la vista de filo)

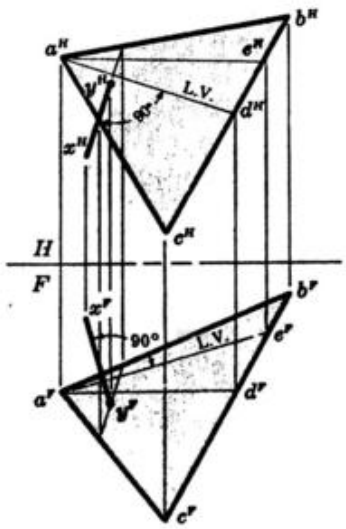


Fig. 5-7. Línea perpendicular a un plano
(Método de las dos vistas)

5.5 LINEA MAS CORTA CON DECLIVE DADO, DESDE UN PUNTO HASTA UN PLANO

Análisis: El plano debe aparecer como un filo en una vista de elevación, para mostrar el ángulo de pendiente de la línea con declive dado, que se pide.

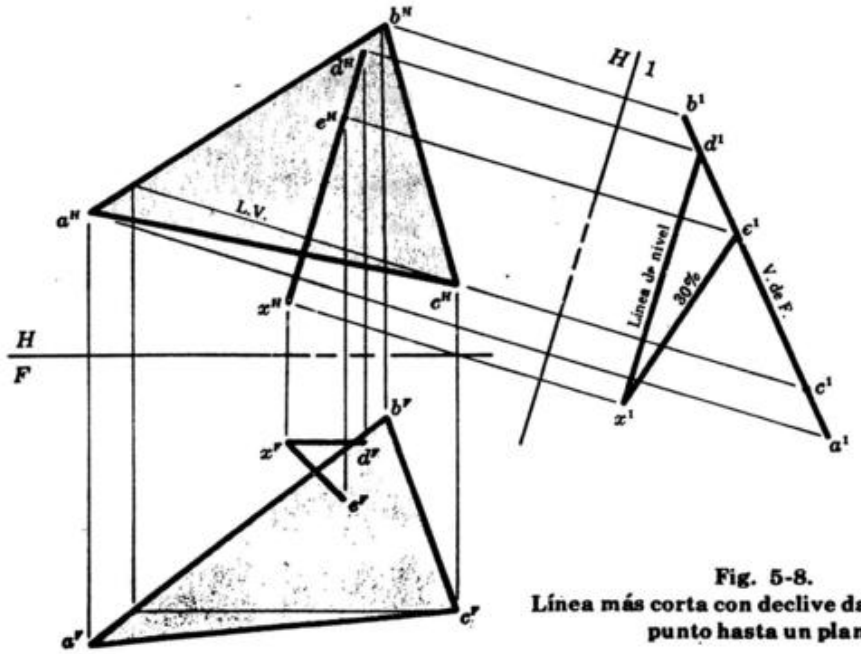


Fig. 5-8.
Línea más corta con declive dado desde un punto hasta un plano

Ejemplo: La vista de planta y la vista de elevación frontal del plano *ABC* y del punto *X* se dan en la Fig. 5-8. Dibuje una vista de elevación auxiliar que muestre el punto *X* y la vista de filo del plano *ABC*. Para localizar la distancia horizontal más corta desde *X* hasta el plano, trace una línea paralela a la línea de pliegue *H*-1 desde *X* hasta la vista de filo del plano. Para localizar la línea más corta desde *X* hasta el plano, que tenga un declive del 30%, trace una línea a partir de *X*, con un declive del 30% respecto a la línea *H*-1. Puesto que las líneas *XD* y *XE* están en sus verdaderas longitudes en la vista 1, aparecerán paralelas a *H*-1 en la vista de planta. Localice las líneas *XD* y *XE* en la vista frontal, por simple proyección.

Debe observarse que todas las líneas con declive más cortas, tendrán el mismo rumbo, sin importar la pendiente que tenga cada una.

5.6 CONSTRUIR UN PLANO QUE CONTENGA A UN PUNTO DADO Y A UNA PERPENDICULAR A UNA LINEA DADA

Análisis: Este problema es el inverso del método de las dos vistas, expuesto en el Art. 5.4. En la Fig. 5-7 se daba el plano y el punto, y la línea perpendicular a través del punto dado se encontraba trazando una perpendicular a cualquier línea en verdadera longitud, situada en el plano. En el caso presente la línea es dada, como también un punto perteneciente al plano. Por este punto dado se traza una línea de nivel, que aparecerá en su verdadera longitud y perpendicular a la línea dada, en la vista de planta. De igual manera se traza una línea frontal por el punto dado, en la vista de planta, y su longitud verdadera aparecerá perpendicular a la línea dada, en la vista frontal. Puesto que ambas líneas pasan por el punto *X*, se cortan en este punto, estableciendo un plano.

Nota: Una vista adicional que muestre la línea en su verdadera longitud, también mostrará el plano como un filo, perpendicular a la línea.

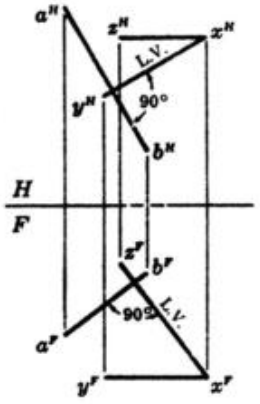


Fig. 5-9.
Plano que contiene a un punto dado y a una perpendicular a una línea dada

Ejemplo: En la Fig. 5-9 se da la línea *AB* y el punto *X* en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. A partir del punto *X* se traza una línea de nivel de longitud indefinida, *XY*. En la vista de planta la línea aparecerá en su longitud verdadera y perpendicular a la línea dada *AB*. Una línea frontal de longitud indefinida, *ZX*, se traza a partir del punto *X*. En la vista frontal, la línea aparecerá en su verdadera longitud y perpendicular a la línea dada, *AB*. El plano *XYZ*, que contiene al punto dado *X*, es perpendicular a la línea *AB*.

5.7 CONSTRUIR UN PLANO QUE CONTENGA A UNA LINEA DADA Y A UNA PERPENDICULAR A UN PLANO DADO

Análisis: Dos líneas que se cortan determinan un plano. Puesto que una línea perteneciente al plano pedido ya es dada, sólo se necesita otra línea que también pertenezca al plano, para construir éste. Esta segunda línea debe cortar la línea dada y además ser perpendicular al plano dado. El plano que se pide debe contener una línea perpendicular al plano dado, para ser perpendicular a éste.

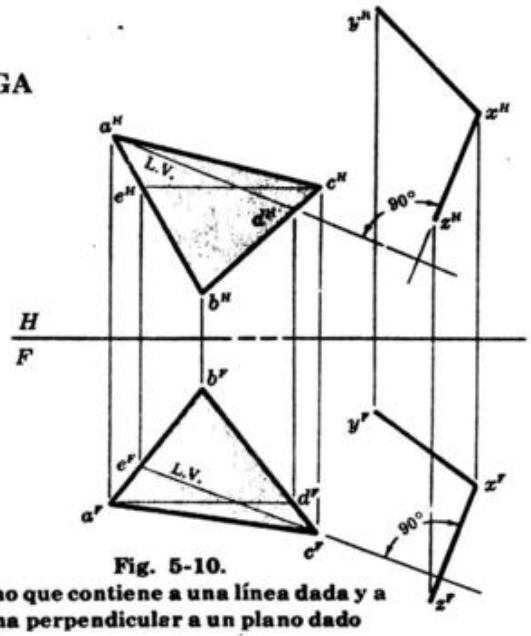


Fig. 5-10.
Plano que contiene a una línea dada y a una perpendicular a un plano dado

Ejemplo: En la Fig. 5-10 se da el plano *ABC* y la línea *XY* en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Se traza una línea de nivel, *AD*, la cual aparece en su verdadera longitud en la vista de planta. Se traza una línea *XY* perpendicular a esta línea en verdadera longitud, perteneciente al plano dado. A continuación se traza una línea frontal, *CE*, que aparece en su verdadera longitud en la vista frontal. De nuevo, se traza la línea *XZ* perpendicular a la línea en verdadera longitud, que pertenece al plano dado. Puesto que las líneas *XY* y *XZ* pasan ambas por el punto *X*, determinarán el plano que se pide.

5.8 CONSTRUIR UN PLANO QUE PASE POR UN PUNTO DADO Y SEA PERPENDICULAR A DOS PLANOS DADOS

Análisis: Un teorema geométrico nos dice que todos los planos que contengan a una línea perpendicular a otro plano son perpendiculares a este otro plano. Si una línea que es perpendicular a un plano dado se intersecta con otra línea que es perpendicular al otro plano dado, estas dos líneas determinan un plano que es perpendicular a los dos planos dados.

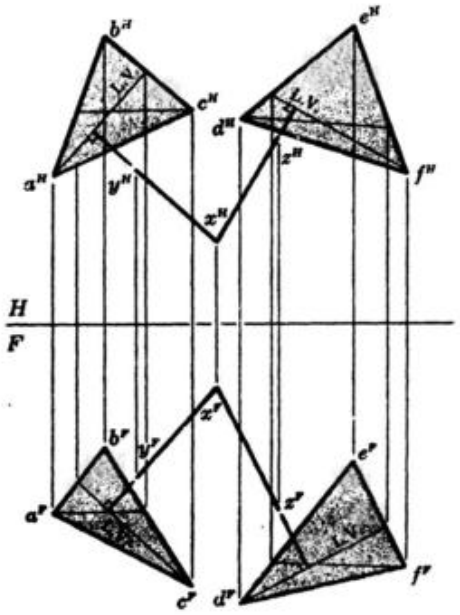


Fig. 5-11.
Plano que pasa por un punto dado y es perpendicular a dos planos dados

Ejemplo: En la Fig. 5-11 se dan los planos *ABC* y *DEF*, junto con el punto *X*, en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Se muestran líneas frontales y de nivel en ambos planos dados, que aparecen en sus longitudes verdaderas. En ambas vistas, la línea *XY* se traza por el punto *X*, perpendicular al plano *ABC*. Igualmente, la línea *XZ* se traza por el punto *X*, perpendicular al plano *DEF*, en ambas vistas. *XYZ* es el plano que se pide, perpendicular a los planos *ABC* y *DEF*.

Problemas resueltos

1. Dado: La línea *AB* es perpendicular a la línea *CD*. $A(4, 1, 6\frac{1}{2})$, $B(5\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 5)$, $C(3\frac{1}{2}, 2, X)$, $D(5\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$. Ver en el Art. 1.7 el sistema de coordenadas para la presentación de problemas. Remítase a la Fig. 5-12.

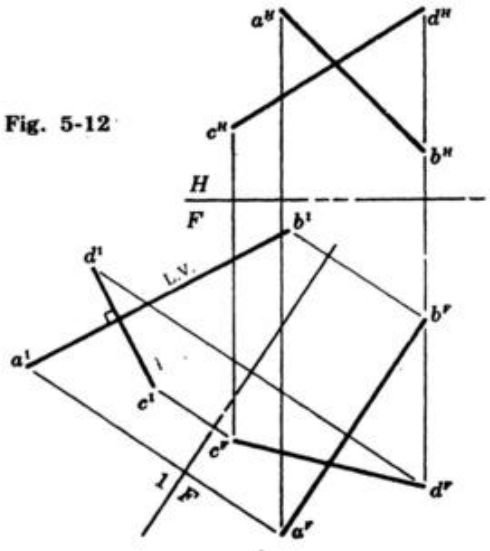


Fig. 5-12

Problema: Determine la coordenada que falta para localizar completamente el punto *C*. Dibuje la vista de planta y las demás vistas que necesite.

Solución:

Utilizando los datos, construya la vista frontal y una parte de la vista de planta. Dibuje una vista inclinada que muestre el punto *D* y la longitud verdadera de la línea *AB*. Por el punto *D*, en esta vista, trace una línea perpendicular a *AB*, hasta

que intersecte la proyección del punto C, procedente de la vista frontal. De este modo queda localizado el punto C en la vista inclinada y puede ser ahora trasladado a la vista de planta. La ordenada que falta para el punto C se halla en la vista de planta. *Resp.* $C(3\frac{1}{2}, 2, 5\frac{1}{4})$

2. **Dado:** El punto $C(4, 3, 4\frac{1}{2})$ es el vértice de un triángulo, cuya base es $A(1, 2\frac{1}{2}, 5)$, $B(3, 1, 6)$. Ver la Fig. 5-13. Escala: $6'' = 1'—0''$.

Problema: Determine la longitud verdadera, la pendiente y el rumbo de la altura del triángulo.

Solución:

La vista de planta y la vista de elevación frontal del plano ABC pueden determinarse por medio de los datos. Dibuje una vista de elevación auxiliar para mostrar el plano como un filo. Dibuje una vista inclinada 2 que muestre el tamaño verdadero del triángulo ABC. Desde el punto C, en la vista 2, trace una perpendicular a la línea AB. Llame este punto de intersección, X, y proyecte CX a las otras vistas. La longitud verdadera de la altura se mide en la vista 2. El rumbo de la altura se mide en la vista de planta. Dibuje una vista de elevación auxiliar 3 para obtener la pendiente de la altura. La longitud verdadera también aparecerá en esta vista.

Resp. L.V. $= 2\frac{9}{16}''$, pendiente $= 36°$, rumbo $=$ N 56° O

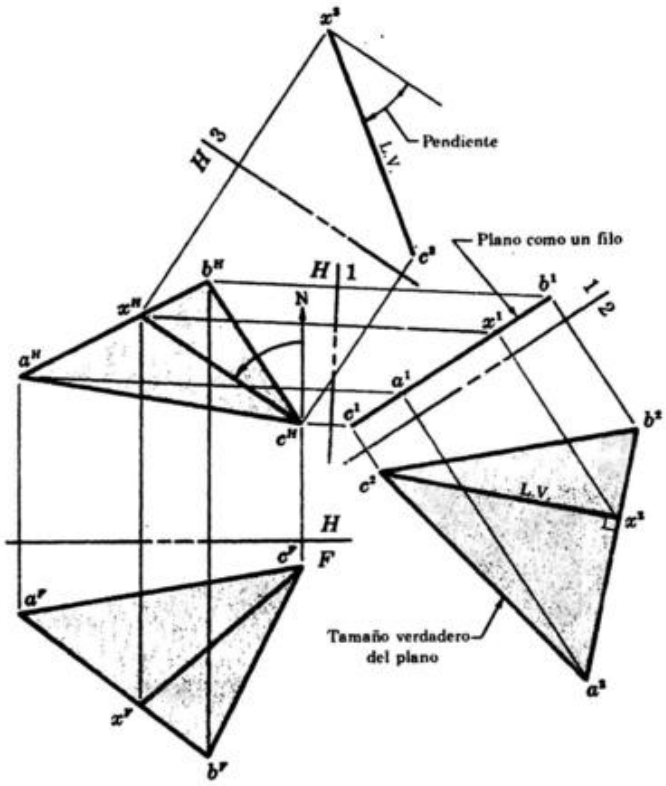


Fig. 5-13

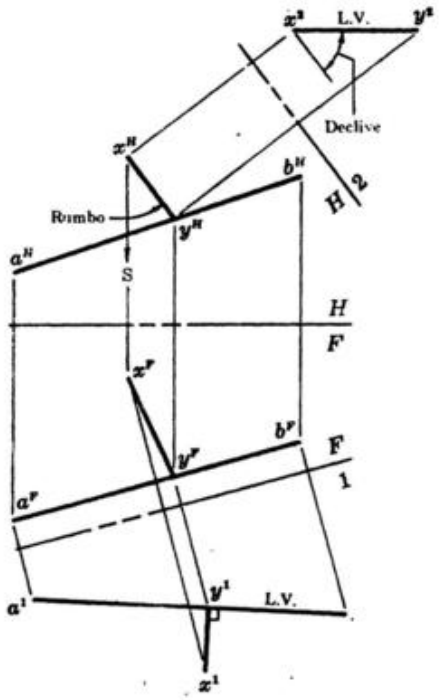


Fig. 5-14

3. **Dado:** AB es la línea media del túnel de una mina. Desde el punto X, situado en la superficie de la tierra, debe abrirse un pozo de ventilación hasta el túnel. El punto B está localizado 150′ al este, 50′ al norte y 40′ por encima de A. El punto X está 60′ al este, 60′ al norte y 75′ por encima de A. Ver la Fig. 5-14. Escala: $1'' = 100'$.

Problema: Usando el método lineal, determine la longitud verdadera, el rumbo y el porcentaje de declive del pozo de ventilación más corto posible. Muestre el pozo de ventilación en todas las vistas.

Solución:

Utilizando los datos, dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal del túnel *AB* y del punto *X*. Dibuje una vista inclinada 1 que muestre el punto *X* y la longitud verdadera del túnel *AB*. Trace desde el punto *X* una línea perpendicular a la línea *AB*. Llame este punto de intersección, *Y*. Proyecte la línea *XY* a las vistas frontal y de planta. Mida el rumbo en la vista de planta. Dibuje una vista de elevación auxiliar 2 para encontrar la longitud verdadera y el declive de la línea *XY*.

Resp. L.V. = 65′—6″, rumbo = S 37° E, declive = —128%

4. **Dado:** Dos puntales están determinados por las líneas *AB* y *CD*, y están unidos por medio de otro puntal, perpendicular a ambos. El punto *B* está 12′ al este, 16′ al norte y 14′ por debajo de *A*. El punto *C* está localizado 6′ al oeste, 10′ al norte y a la misma elevación de *A*. El punto *D* está 4′ al este, 12′ al norte y 16′ por debajo de *A*. Ver la Fig. 5-15. **Escala:** $\frac{1}{32}'' = 1'—0''$.

Problema: Usando el método lineal, determine la longitud verdadera, la pendiente y el rumbo del puntal de unión.

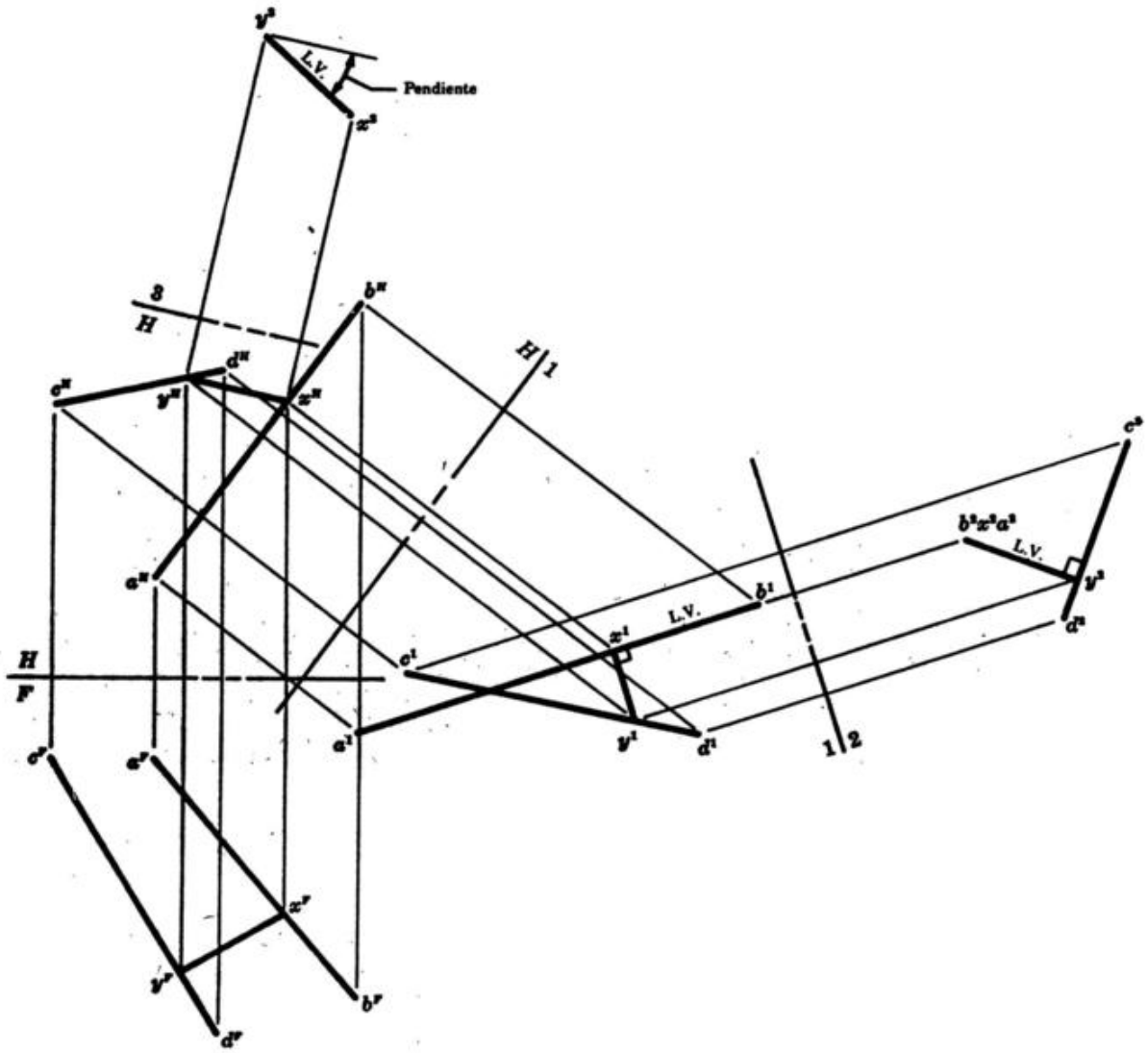


Fig. 5-15

Solución:

Utilizando los datos, localice las vistas de planta y frontal de los puntales *AB* y *CD*. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 que muestre ambos puntales, uno de los cuales, *AB*, aparece en su verdadera longitud. Construya una vista inclinada 2 para ver a *AB* como un punto. En esta misma vista trace *CD* y una línea perpendicular a *CD* desde la vista de punta de *AB*. Esta distancia perpendicular es la longitud verdadera del puntal de unión. Llame los dos extremos de este puntal, *X* y *Y*, respectivamente. Proyecte la línea *XY* a las otras vistas. El rumbo de *XY* se mide en la vista de planta. Dibuje una vista de elevación auxiliar 3 para obtener la pendiente del puntal de unión. *Resp.* L.V. = 7'—0", pendiente = 30°, rumbo = N 77°30' O

5. **Dado:** La base de una pirámide recta, *ABCD*, se localiza así: $A(2, 2, 5)$, $B(3\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 6)$, $C(4\frac{3}{4}, 2, 6)$, $D(3\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}, 5)$. La altura de la pirámide es $2\frac{1}{2}$". Ver la Fig. 5-16. Escala: $\frac{1}{2}$" = 1".

Problema: Dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal de la pirámide, mostrando su visibilidad correcta.

Solución:

Usando los datos, dibuje la base de la pirámide en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Localice el centro de la base, trazando las diagonales. Llame el centro de la base, *X*. Dibuje una vista inclinada 1 para mostrar el plano de la base como un filo. Desde el punto *X*, en esta vista, trace una línea perpendicular de $2\frac{1}{2}$" de longitud. Llame el vértice de la pirámide, *Y*. Proyecte el vértice a las otras vistas. Una los puntos *A*, *B*, *C* y *D* con el punto *Y*, para completar las vistas. Por medio de una cuidadosa visualización se determinará la visibilidad correcta.

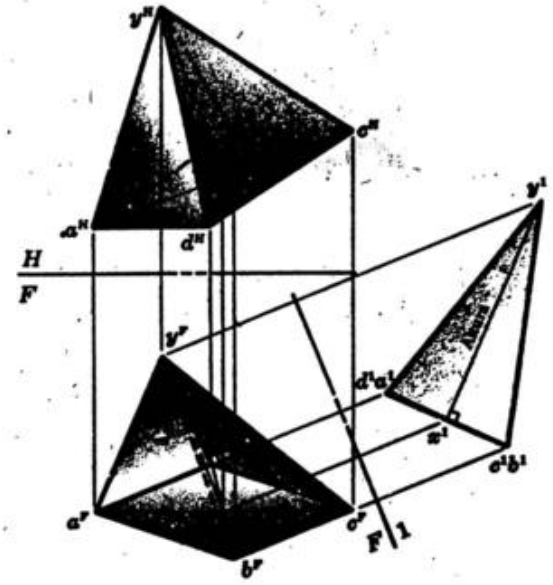


Fig. 5-16

6. **Dado:** Hay una posibilidad de interferencia entre una cañería *AB* de 12" de diámetro y un tanque esférico de 10' de diámetro. Ver la Fig. 5-17. El punto *B* está localizado 12' al este, 5' al norte y 3' por debajo de *A*. El centro del tanque esférico, punto *X*, está localizado 4' al este, 8' al norte y 6' por debajo de *A*. Escala: $\frac{1}{8}$" = 1'—0".

Problema: ¿Cuál será el espacio libre, si existe, entre la cañería y el tanque? Utilice el método del plano.

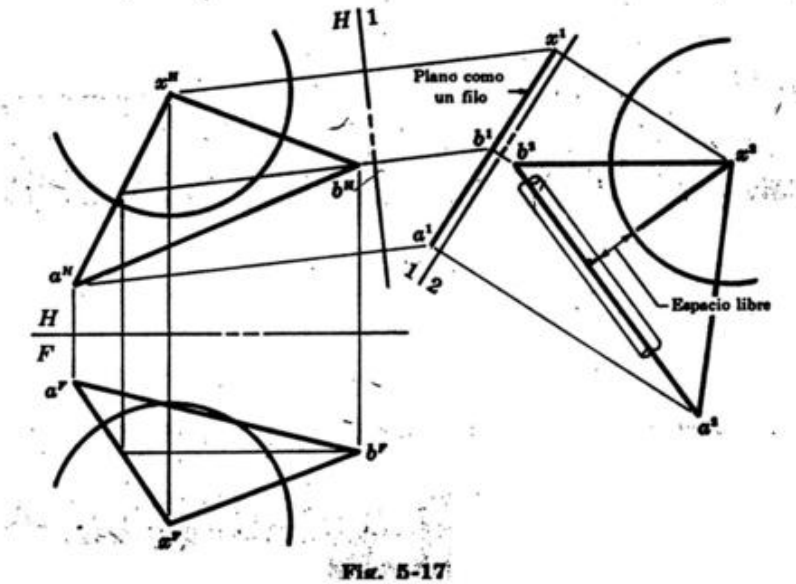


Fig. 5-17

Solución:

Usando los datos, localice la línea AB y el punto X en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Una el punto X con los extremos de la línea AB para formar el plano ABX. En una vista de elevación auxiliar 1 muestre el plano como un filo. Construya la vista inclinada 2, que mostrará el tamaño verdadero del plano ABX. Usando X como centro, dibuje una parte de una esfera. Muestre el diámetro de la cañería sobre la línea AB. Mida el espacio libre, trazando una perpendicular a la línea AB desde el punto X, como se indica.

Resp. Espacio libre = 1′—9″

7. **Dado:** El plano ABC y el punto X estan localizados así: B está 8′ exactamente al este y a la misma elevación de A. El punto C está 3′ al este, 6′ al norte y 4′ por debajo de A. El punto X está localizado 6′ al este, 1′ al norte y 5′ por debajo de A. Ver la Fig. 5-18. Escala: $\frac{1}{8}'' = 1'—0''$.

Problema: Encuentre la distancia horizontal más corta desde el punto X hasta el plano ABC. Determine la longitud de la línea más corta desde X hasta el plano, que tenga una pendiente de 30°. ¿Cuál es el rumbo de cada línea? Muestre las dos líneas que parten de X, en todas las vistas.

Solución:

Dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal del plano ABC y del punto X. Puesto que la línea AB es una línea frontal-horizontal, el plano aparecerá como un filo en la vista de perfil. Trace una línea de nivel desde el punto X hasta el plano ABC prolongado. Llame este punto de intersección, Y, y proyecte XY a las otras vistas. Otra vez en la vista de perfil, trace una línea con pendiente de 30°, desde el punto X hasta cortar el plano. Llame este punto de intersección, Z, y proyecte XZ a las otras vistas. La línea XY es la distancia horizontal más corta desde X hasta el plano ABC y la línea XZ es la línea más corta desde X hasta ABC, que tiene una pendiente de 30°. Las longitudes verdaderas se miden en la vista de perfil y los rumbos en la vista de planta.

Resp. L.V. de la línea de nivel = 6′—6½″, L.V. de la línea con pendiente de 30° = 4′—0″, Rumbo de XY y XZ = Norte-Sur.

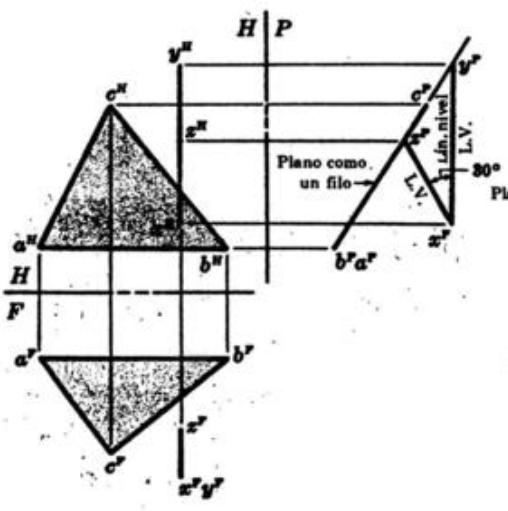


Fig. 5-18

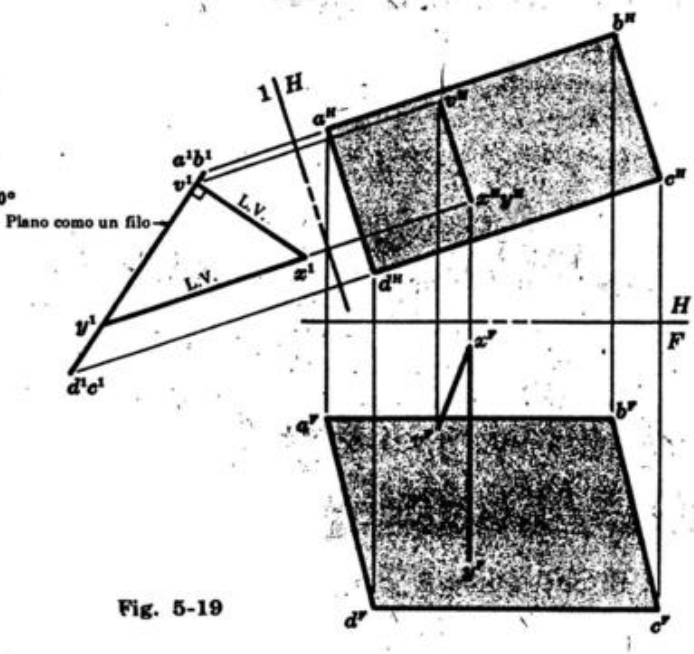


Fig. 5-19

8. **Dado:** Una antena de televisión está colocada sobre el techo de una casa, como se muestra en la Fig. 5-19. El plano del techo, $ABCD$, y el extremo superior de la antena, punto X, están localizados así: $A(3, 3\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$, $B(6, 3\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2})$, $C(6\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 6)$, $D(3\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 5)$, $X(4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{4}, 5\frac{3}{4})$. Escala: $\frac{1}{8}'' = 1'—0''$.

Problema: Si un puntal de soporte llega hasta el punto X y es perpendicular al techo, ¿qué longitud debe tener el puntal? ¿Qué longitud tiene la antena vertical? Muestre el puntal y la antena en todas las vistas.

Solución:

Utilizando los datos, dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal del plano del techo y del extremo superior de la antena. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 para mostrar el punto X y la vista de filo del plano del techo. Desde el punto X, en la vista 1, trace una perpendicular a la vista de filo del plano $ABCD$. Esta distancia será la longitud verdadera del puntal. Llame el punto de intersección del puntual con el techo, V, y proyéctelo a la vista de planta y a la vista de elevación frontal. Desde el punto X, en la vista 1, trace una línea vertical, perpendicular a la línea de pliegue H-1. La intersección de esta línea con el techo determinará la verdadera longitud de la antena. Llame Y al punto de intersección, y proyéctelo a la vista de planta y a la vista de elevación frontal. *Resp.* L.V. del puntal = 5′—7″, L.V. de la antena = 9′—0″

9. Dado: El plano ABC y el punto X se muestran en la Fig. 5-20. El plano y el punto X se localizan así: $A(4, 3, 4\frac{1}{2})$, $B(5, 1, 5\frac{1}{2})$, $C(6, 2\frac{1}{2}, 4)$, $X(5\frac{1}{2}, 3, 5)$. Ver en el Art. 1.7 el sistema de coordenadas para la presentación de problemas. Escala: $\frac{1}{8}'' = 1'—0''$.

Problema: Determine la longitud verdadera y el rumbo de la línea más corta desde X hasta el plano, que tenga una pendiente de —45°. Utilice el método de la vista de filo.

Solución:

Dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal del plano ABC y del punto X, a partir de los datos. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 para mostrar el punto X y la vista de filo del plano ABC. Desde el punto X trace una línea con pendiente de 45°, hasta que corte la vista de filo del plano. Llame este punto de intersección, Y, y proyecte la línea XY a las vistas de planta y frontal, utilizando la visibilidad correcta. La longitud de la línea pedida se mide en la vista 1 y el rumbo de XY se mide en la vista de planta.

Resp. L.V. = 3′—7″, rumbo = S 24° O

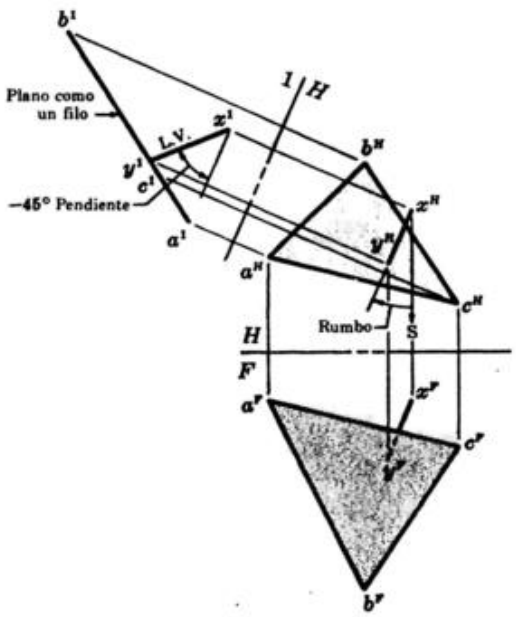


Fig. 5-20

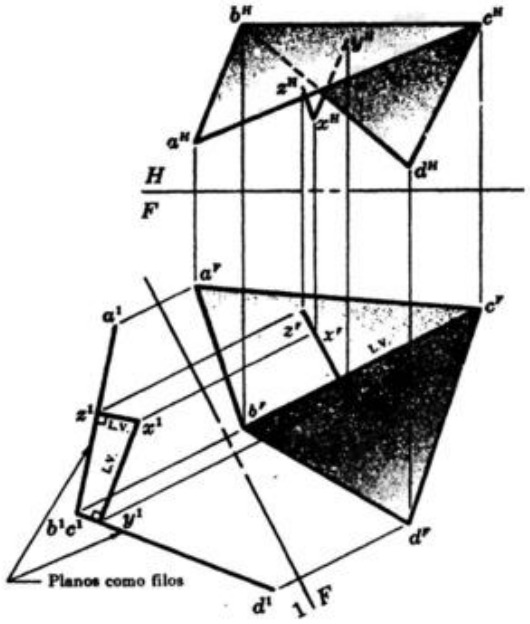


Fig. 5-21

10. Dado: El punto X y los planos que se cortan, ABC y BCD, que tienen a BC como línea común de intersección. Ver la Fig. 5-21. El punto B está 2′ al este, 5′ al norte y 6′ por debajo de A. El punto C está 12′ al este, 5′ al norte y 1′ por debajo de A. El punto D está 9′ al este, 1′ al sur y 10′ por debajo de A. El punto X está 5′ al este, 1′ al norte y 2′ por debajo de A. Escala: $\frac{1}{8}'' = 1'—0''$.

Problema: ¿A qué distancia está el punto X de cada plano? Muestre estas distancias en todas las vistas, con la visibilidad correcta.

Solución:

Utilizando los datos, dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal de los planos ABC y BCD y del punto X. Puesto que la línea común de intersección, BC, es una línea frontal, aparecerá en su longitud verdadera en la vista de elevación frontal. Localice la línea de pliegue F-1 perpendicular a la longitud verdadera de la

línea de intersección y proyecte para obtener el punto X y la vista de filo de los dos planos. Trace una perpendicular a cada plano desde el punto X. La distancia perpendicular es la distancia verdadera desde el punto hasta cada uno de los planos. Proyecte las líneas XY y XZ a las otras vistas. Haga una cuidadosa visualización para determinar la visibilidad correcta. *Resp.* XY = 4'—6", XZ = 1'—9"

11. Dado: El plano $ABCD$ y los puntos X y Y. El plano y los puntos están localizados así: $A(1, 2, 5\frac{1}{2})$, $B(2, 2\frac{1}{2}, 4)$, $C(4, 1, 5)$, $D(3, \frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$, $X(2, 3\frac{1}{4}, 6\frac{1}{2})$, $Y(1\frac{1}{4}, 1, 4\frac{1}{2})$. Ver la Fig. 5-22. Escala: $\frac{1}{8}$" = 1'—0".

Problema: ¿Cuál de los dos puntos está más cerca del plano y por cuánto? Muestre la distancia perpendicular en todas las vistas. Determine la visibilidad correcta.

Solución:

Utilizando los datos, localice la vista de planta y la vista de elevación frontal del plano $ABCD$ y de los puntos X y Y. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 para mostrar los puntos X y Y, junto con la vista de filo del plano $ABCD$. Trace líneas perpendiculares a la vista de filo del plano, desde los puntos X y Y. Las distancias perpendiculares son las distancias verdaderas desde cada uno de los puntos hasta el plano. Mida ambas distancias y réstelas para determinar cuál de los dos puntos está más cerca del plano y por cuánto. Llame V el punto de intersección entre la línea que parte de X y el plano. Llame Z el punto de intersección entre la línea que parte de Y y el plano. Proyecte las líneas XV y YZ a las otras vistas.

Resp. Y está 2'—7" más cerca del plano que X

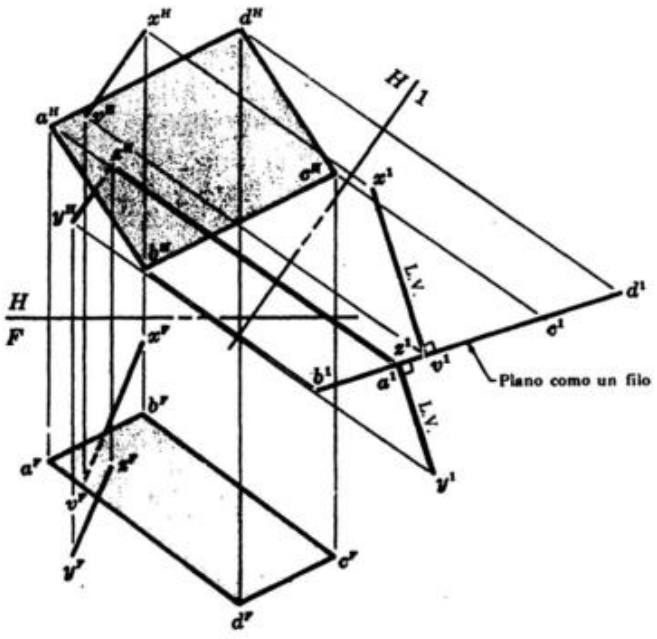


Fig. 5-22

12. Dado: ABC y DEF son dos planos paralelos y el punto X está localizado en el plano ABC. El punto B está 7' al este, 5' al norte y 4' por debajo de A. El punto C está localizado 8' al este, 2' al sur y a la misma elevación de A. El punto D está 1'—6" al este, 1' al sur y 5' por encima de A. El punto E está localizado 8'—6" al este, 4' al norte y 1' por encima de A. El punto F está localizado 9'—6" al este, 3' al sur y 5' por encima de A. El punto X, situado en el plano ABC, está 7' exactamente al este de A. Ver la Fig. 5-23. Escala: $\frac{1}{8}$" = 1'—0".

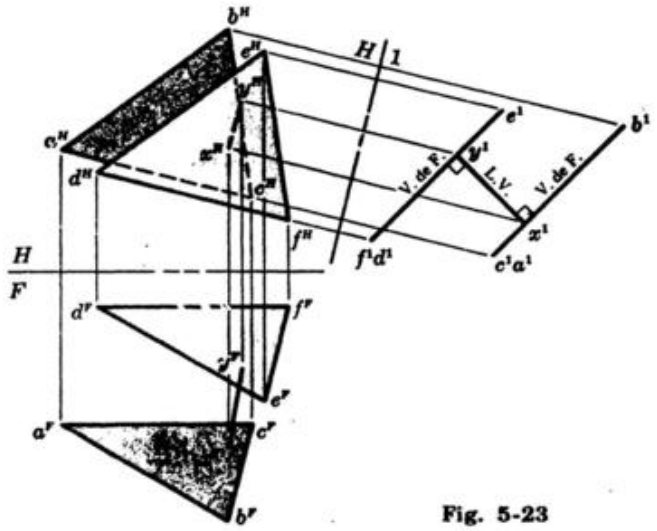


Fig. 5-23

Problema: Determine la distancia más corta desde el punto *X* hasta el plano *DEF*. Muestre esta distancia en todas las vistas. Determine la visibilidad correcta.

Solución:

Construya la vista de planta y la vista de elevación frontal de los dos planos. Localice el punto *X* en la vista de planta. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 que muestre ambos planos como filos paralelos. Proyecte el punto *X* desde la vista de planta hasta la vista de elevación auxiliar 1, localizándolo sobre la vista de filo del plano *ABC*. Trace una perpendicular a la vista de filo del plano *DEF*, desde el punto *X*. Llame este punto, *Y*, y proyecte la línea *XY* a las vistas de planta y frontal. En la vista de planta la línea *XY* será paralela a la línea de pliegue *H*-1, puesto que la longitud verdadera de la línea pedida se muestra en la vista 1. Haga una cuidadosa visualización para determinar la visibilidad correcta. *Resp.* Distancia = 4'—0"

13. Dado: Una cañería está representada por la línea *AB* en la Fig. 5-24. Se debe instalar una te a 90° para conectar la cañería con un tubo que arranca desde *X*. Escala: $\frac{1}{16}$" = 1'—0".
Problema: ¿Cuál es la longitud verdadera, la pendiente y el rumbo del tubo de conexión? ¿A qué distancia de *A* debe abrirse la cañería? Utilice el método lineal. Muestre el tubo de conexión en todas las vistas.

Solución:

Utilizando los datos, localice la cañería y el punto *X* en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 que muestre el punto *X* y la longitud verdadera de *AB*. Desde el punto *X* trace una línea perpendicular a la cañería. Llame este punto de conexión, *Y*, y proyecte *XY* a las vistas de planta y frontal. La vista de elevación auxiliar 1 mostrará la distancia verdadera desde el punto de conexión hasta el punto *A*. El rumbo del tubo de conexión se medirá en la vista de planta. Para obtener la longitud verdadera y la pendiente del tubo de conexión, dibuje una vista de elevación auxiliar 2.

Resp. L.V. = 13'—5", pendiente = 53°, rumbo = N 26° E, distancia desde *A* hasta el punto de conexión = 7'—6"

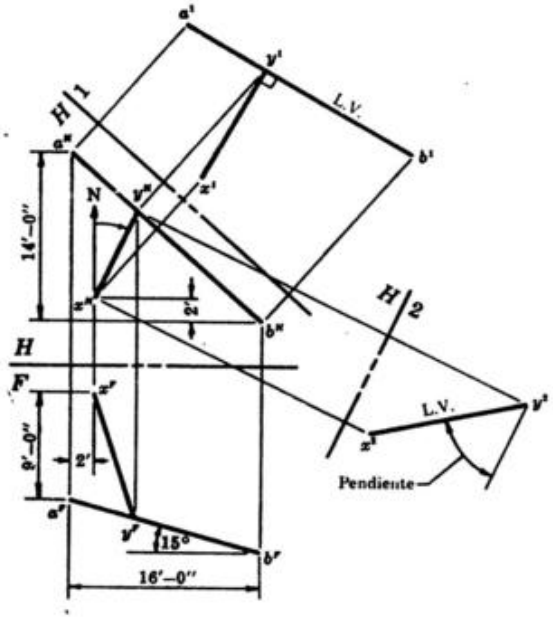


Fig. 5-24

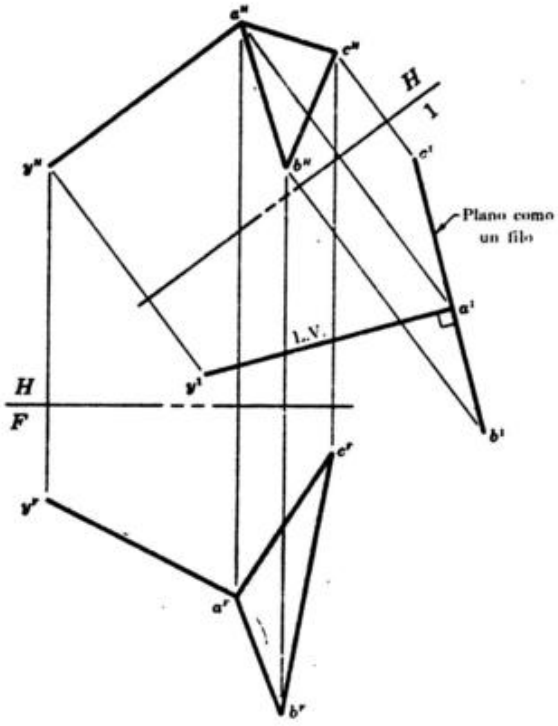


Fig. 5-25

14. Dado: El plano *ABC* y el punto *Y* están localizados así: $A(3, 2, 8)$, $B(3\frac{1}{2}, X, 6\frac{1}{2})$, $C(4, 3\frac{1}{2}, X)$, $Y(1, 3, 6\frac{1}{2})$. Ver la Fig. 5-25.
Problema: Dibuje el plano *ABC* perpendicular a la línea *YA*. ¿Cuál es la localización aproximada del punto *B*?

Solución:

Utilizando los datos, construya una parte de las vistas de planta y frontal del plano y del punto *Y*. Una èl punto *Y* con el punto *A*, en ambas vistas. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 para mostrar la línea *YA* en su verdadera longitud. Por el punto *A*, en esta vista, trace una línea perpendicular a la longitud verdadera de *YA*. Proyecte el punto *B* desde la vista de planta hasta la vista 1 y localice, también sobre esta vista, el punto *C*. Los puntos *B* y *C* estarán localizados sobre la línea perpendicular a la longitud verdadera de *YA*. Los puntos *A*, *B* y *C*, en la vista 1, establecen la vista de filo del plano perpendicular a la línea *YA*. Complete la vista de planta y la vista de elevación frontal. *Resp.* $B(3\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 6\frac{1}{2})$

15. Dado: Los planos *ABC* y *DEF* y el punto *X* están localizados así: El punto *B* está 2′ al este, 4′ al norte y 2′ por encima de *A*. El punto *C* está 5′ al este, 2′ al norte y 3′ por debajo de *A*. El punto *D* está 9′ al este, 2′ al norte y 4′ por debajo de *A*. El punto *E* está 12′ al este, 5′ al norte y 2′ por encima de *A*. El punto *F* está 14′ al este, 1′ al sur y 1′ por debajo de *A*. El punto *X* está localizado 7′ al este, 3′ al sur y 3′ por encima de *A*. Ver la Fig. 5-26. Escala: $\frac{3}{16}'' = 1'—0''$.

Problema: Localice un plano que pase por el punto *X* y sea perpendicular a los planos *ABC* y *DEF*. Determine la pendiente de este nuevo plano.

Solución:

Usando los datos, dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal de los planos *ABC* y *DEF*, y del punto *X*. Trace una línea en verdadera longitud en cada uno de los planos dados, en ambas vistas. La línea *XY* pasa por el punto *X* y es perpendicular al plano *ABC*, en ambas vistas. De igual manera, en ambas vistas la línea *XZ* pasa por el punto *X* y es perpendicular al plano *DEF*. *XYZ* es el plano que se pide, perpendicular a los planos *ABC* y *DEF*. La vista de elevación auxiliar 1 mostrará el plano *XYZ* como un filo y la pendiente puede ser medida en esta vista. *Resp.* Pendiente = 46°

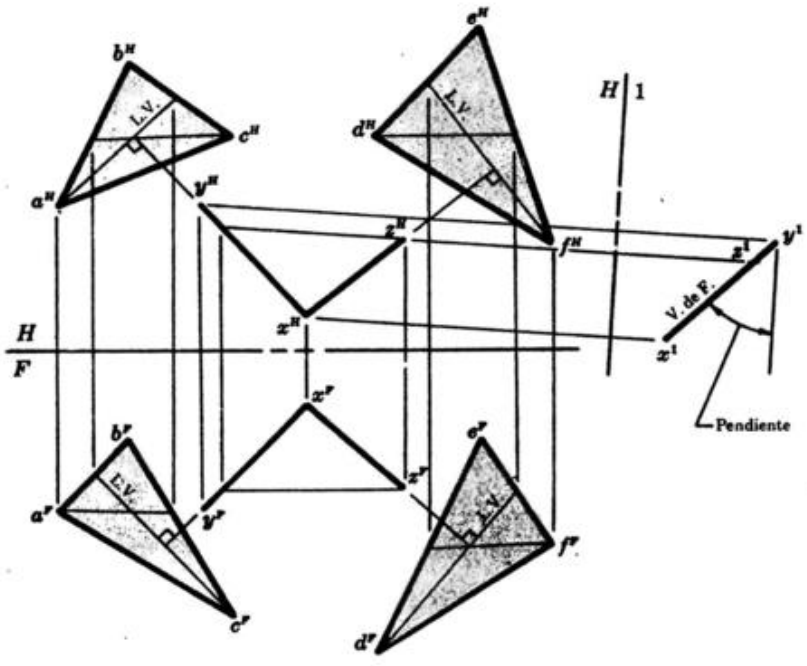


Fig. 5-26

Problemas propuestos

En cada uno de los siguientes problemas (16 a 25) determine la longitud verdadera, la pendiente y el rumbo de la distancia más corta desde el punto *X* hasta la línea *AB*. Muestre la distancia más corta como una línea, en todas las vistas. Mida la longitud verdadera, aproximando hasta el dieciseisavo de pulgada. Escala: 12" = 1'—0".

Ver en el Art. 1.7 la presentación de problemas por medio de coordenadas.

16. $A(2, 4, 5)$, $B(4, 2, 6\frac{1}{2})$, $X(3, 3, 5\frac{1}{2})$ — *Resp.* L.V. = $\frac{1}{4}$", pendiente = 16°, rumbo = N 22° O

17. $A(2, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$, $B(2, 2, 6)$, $X(2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 5)$ — *Resp.* L.V. = $1\frac{3}{16}$", pendiente = 39°30', rumbo = N 34° O

18. $A(2, 4, 6)$, $B(4, 4, 5)$, $X(3, 3\frac{1}{4}, 5\frac{1}{4})$ — *Resp.* L.V. = $\frac{13}{16}$", pendiente = 73°, rumbo = N 26° E

19. $A(2, 4\frac{1}{2}, 6)$, $B(4, 4\frac{1}{2}, 6)$, $X(2\frac{1}{2}, 3, 5)$ — *Resp.* L.V. = $1\frac{13}{16}$", pendiente = 56°, rumbo = N-S

20. $A(2, 3, 6)$, $B(2, 2, 4\frac{1}{2})$, $X(2, 3\frac{1}{2}, 5)$ — *Resp.* L.V. = $\frac{15}{16}$", pendiente = 56°30', rumbo = N-S

21. $A(1, 2\frac{1}{2}, 5)$, $B(4, 4, 5\frac{1}{4})$, $X(2\frac{1}{4}, 2, 6)$ — *Resp.* L.V. = $1\frac{3}{8}$", pendiente = 42°, rumbo = S 23° O

22. $A(2, 1, 4\frac{1}{2})$, $B(4\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 6)$, $X(3, 2\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$ — *Resp.* L.V. = $1\frac{3}{16}$", pendiente = 3°30', rumbo = S 28°30' E

23. $A(5, 1\frac{1}{2}, 5)$, $B(5, 4\frac{1}{2}, 6)$, $X(3, 3, 5\frac{1}{4})$ — *Resp.* L.V. = 2", pendiente = 3°30', rumbo = N 82° E

24. $A(2\frac{1}{4}, 1, 5)$, $B(3\frac{1}{2}, 4, 6)$, $X(2\frac{1}{2}, 3, 6\frac{1}{2})$ — *Resp.* L.V. = $1\frac{1}{16}$", pendiente = 1°30', rumbo = S 35°30' E

25. $A(2, 4\frac{1}{2}, 6)$, $B(5, 2, 5)$, $X(5, 3, 4\frac{1}{2})$ — *Resp.* L.V. = 1", pendiente = 45°, rumbo = N 29° O

26. La Fig. 5-27 muestra un plano *ABCD*, representado por dos líneas paralelas. Escala: $\frac{1}{4}$" = 1'—0". Encuentre la distancia horizontal más corta desde *X* hasta el plano. Determine también la línea más corta desde *X* hasta el plano, que tenga un declive del 25%. ¿Cuál es el rumbo de cada línea?

Resp. Distancia horizontal más corta = 5'—2$\frac{1}{2}$"
Línea más corta con declive del 25% = 4'—3"
Rumbo de ambas líneas = N 65°30' E

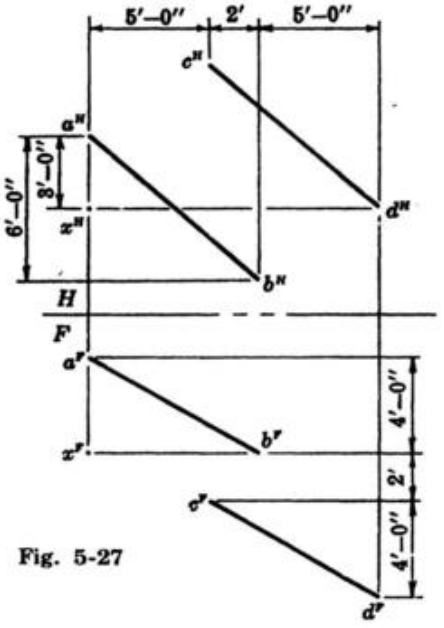


Fig. 5-27

27. *ABCD* es un paralelogramo, cuyo centro geométrico es el punto *X*. Complete la vista de planta y la vista de elevación frontal. $A(2\frac{1}{2}, 4, 5\frac{1}{2})$, $B(5, 3, 7)$, $X(3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 7)$. Determine las coordenadas de los puntos *C* y *D*.

Resp. Punto $C(4\frac{1}{2}, 1, 8\frac{1}{2})$
Punto $D(2, 2, 7)$

28. La línea *AB* determina una porción de una línea de agua. El punto *B* está localizado 150' al este, 75' al norte y 50' por encima de *A*. El punto *X* localiza el contador de agua de una casa cercana. *X* está 75' al este, 75' al norte y 75' por encima de *A*. Escala: 1" = 50'. Determine la distancia más corta desde el contador hasta la línea principal, si se hace una conexión a 45° con ésta.

Resp. L.V. = 76'

29. En la Fig. 5-28 hemos mostrado el plano de un lote de esquina situado en un área residencial. Escala: 1" = 100'. *AB* y *BC* son las líneas medias de una línea de agua principal. Si el contador de agua de la casa está localizado en *D*, ¿cuál sería la distancia más corta desde el contador hasta la línea de agua? Muestre la distancia más corta en todas las vistas. *Resp.* 155'

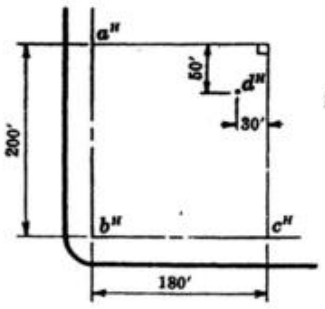


Fig. 5-28

30. ¿Cuál será la longitud verdadera de un tubo de derivación que va desde *X* hasta la línea *AB*, si la conexión se hace por medio de una te a 90°? Escala: 1" = 40'. $A(1, 1, 4)$, $B(3\frac{1}{2}, 2, 4)$, $X(1, 2\frac{1}{2}, 4)$. Determine la pendiente y el rumbo de este tubo de conexión.

Resp. L.V. = 55'—6", pendiente = —68°, rumbo = E—O

31. *AB* es un segmento de tubo, al cual se debe conectar otro tubo que parte de *C* por medio de un tubo a 45°. $A(1, 1\frac{1}{2}, 8)$, $B(3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 8)$, $C(2, 1, 9)$. Escala: $\frac{1}{4}$" = 1'—0". Determine la longitud verdadera, la pendiente y el rumbo del tubo de conexión. *Resp.* L.V. = 8'—2", pendiente = 56°30', rumbo = S 27° E

32. La Fig. 5-29 muestra el techo de una casa de campo y la parte superior del asta de una bandera. Escala: 1" = 10'—0". El extremo superior del asta se asegura al techo por medio de un viento de alambre de longitud lo más pequeña posible. ¿Qué longitud debe tener el viento?
Resp. L.V. = 17'—10"

33. *AB* representa un túnel de una mina de carbón. Una explosión ha cerrado el túnel en el pozo principal de acceso que llega hasta la superficie de la tierra. Se decide abrir un nuevo pozo desde le punto *X*, situado en la superficie de la tierra, para llegar hasta los mineros sepultados. El punto *B* está localizado 150' al este, 50' al norte y 40' por encima de *A*. El punto *X* está 60' al este, 60' al norte y 75' por encima de *A*. Escala: 1" = 50'. Determine la longitud verdadera, el rumbo y el declive del pozo de emergencia. Si la cuadrilla de rescate avanza a una velocidad media de 13' por hora, ¿cuánto tiempo le llevará llegar al túnel?
Resp. L.V. = 65'—6"
Rumbo = S 37° E
Declive = 128%
Tiempo = 5 horas (aprox.)

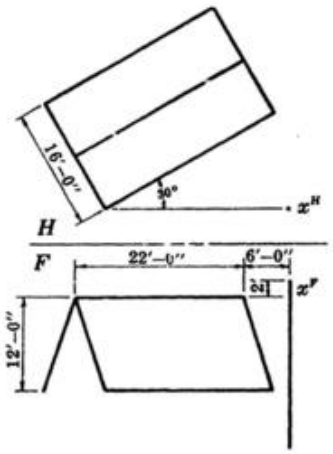


Fig. 5-29

En cada uno de los siguientes problemas (34 a 38) determine la longitud verdadera de la distancia más corta desde el punto *X* hasta el plano *ABC*. ¿Cuál es el rumbo de la distancia más corta? Escala: 1" = 1'—0".

Ver en el Art. 1.7 el sistema de coordenadas para la presentación de problemas.

34. $A(2, 3, 5)$, $B(3, 1, 6\frac{1}{2})$, $C(3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 4)$, $X(2\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$ *Resp.* L.V. = 1'—9", rumbo = N 47° E

35. $A(1, 3, 6)$, $B(2\frac{1}{4}, 2, 6)$, $C(4, 4, 5\frac{1}{4})$, $X(3, 4\frac{1}{4}, 7)$ *Resp.* L.V. = 1'—6$\frac{1}{2}$", rumbo = S 10°30' O

36. $A(1, 1\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$, $B(3, \frac{1}{2}, 4)$, $C(4\frac{1}{2}, 3, 6)$, $X(2, \frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$ *Resp.* L.V. = 1'—6$\frac{3}{4}$", rumbo = S 14°30' O

37. $A(1\frac{1}{2}, 3, 4)$, $B(2, 3, 5)$, $C(4\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 6)$, $X(3\frac{1}{2}, 3, 7\frac{1}{4})$ *Resp.* L.V. = 0'—1$\frac{1}{4}$", rumbo = N 63°30' O

38. $A(2, 4, 7)$, $B(2, 3, 5)$, $C(4, 3, 4)$, $X(3\frac{1}{4}, 1, 5)$ *Resp.* L.V. = 1'—11$\frac{3}{4}$", rumbo = S 27° O

39. La Fig. 5-30 muestra un adaptador que está unido al punto *X* por medio de un cable. Escala: $\frac{1}{2}$" = 1'—0". Determine la distancia más corta posible desde el punto *X* hasta la cara del adaptador más cercana a él. *Resp.* Distancia = 2'—1$\frac{1}{2}$"

40. Se da el plano *ABC* y el punto *X*. El punto *B* está 10' al este, 8' al norte y 12' por debajo de *A*. El punto *C* está 16' al este, 2' al sur y 5' por debajo de *A*. El punto *X* está 6' al este, 2' al sur y 14' por debajo de *A*. Escala: $\frac{1}{8}$" = 1'—0". Determine la distancia horizontal más corta desde el punto *X* hasta el plano *ABC*. ¿Cuál será la línea más corta desde *X* hasta el plano, que tenga un declive del 35%? Determine el rumbo de las dos líneas.
Resp. Distancia horizontal más corta = 12'—7"
Línea más corta con 35% de declive = 10'—0"
Rumbo de ambas líneas = N 23°30' E

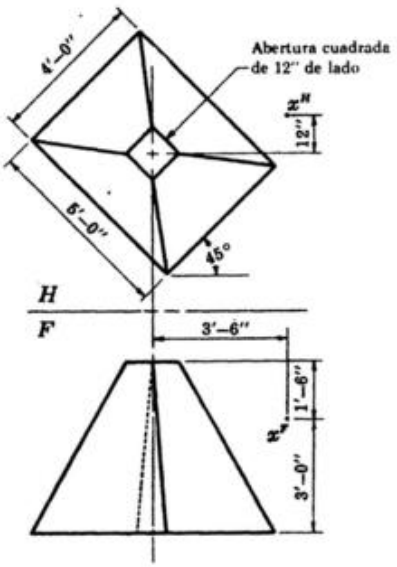


Fig. 5-30

41. La línea *AB* determina una porción de una línea de agua. El punto *B* está localizado 150' al este, 75' al norte y 50' por encima de *A*. El punto *X* localiza el contador de agua de una casa vecina. *X* está 75' al este, 75' al norte y 75' por encima de *A*. Escala: 1" = 50'. Determine la longitud verdadera, la pendiente y el rumbo de la cañería de conexión más corta posible desde el contador de agua hasta la línea de agua principal. Resuelva el problema utilizando el método lineal. Muestre la cañería de conexión en todas las vistas.
Resp. L.V. = 54'
Pendiente = —50°
Rumbo = S 46°30' E

42. Dos líneas, *AB* y *CD* se cortan para formar un plano. Se pide encontrar la distancia desde un punto dado, *X*, hasta el plano *ABCD*. El punto *B* está localizado 9' al este y 5' al sur de *A* y su elevación no es dada. El punto *C* está 1' al oeste, 8' al sur y 5' por debajo de *A*. El punto *D* está 6' al este, 1' al norte y 1' por encima de *A*. El punto *X* está localizado 7' al este, 3' al sur y 2' por encima de *A*. Escala: $\frac{1}{4}$" = 1'—0".
Resp. Distancia = 2'—10"

Capítulo 6

Angulo diedro y ángulo entre una línea y un plano

Con frecuencia un ingeniero necesita determinar el ángulo entre dos planos que se cortan, así como también la amplitud real del ángulo formado entre una línea y un plano. La comprensión de los principios fundamentales involucrados en estos dos temas puede considerarse esencial para la mayor parte de los estudiantes de ingeniería y de ciencias.

6.1 ANGULO DIEDRO

Definición: Angulo diedro es el ángulo formado por dos planos que se cortan. El ángulo diedro se mide en un plano perpendicular a la línea de intersección de los dos planos. (Ver la Fig. 6-1.)

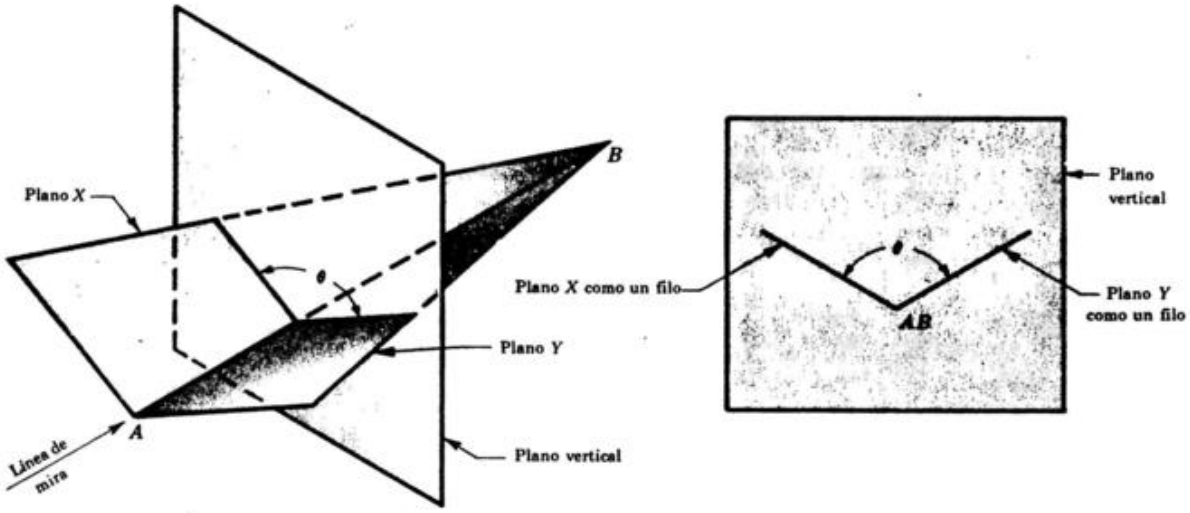


Fig. 6-1. Angulo diedro

A. Con la línea de intersección dada

Análisis: Una vista que muestre la línea de intersección de dos planos como un punto, también mostrará los dos planos como filos. El ángulo entre las dos vistas de filo de los planos representa la amplitud real del ángulo diedro.

Ejemplo: (Fig. 6-2.) Se desea encontrar el ángulo diedro entre los planos *ABD* y *ACD*, dada la línea de intersección de los dos planos. Se dibuja una vista de elevación auxiliar que muestre la línea de intersección *AD* en su longitud verdadera. Luego se dibuja la vista inclinada 2 para mostrar la línea de intersección como un punto. Esta vista muestra también los dos planos dados como filos. El ángulo diedro se mide entre las dos vistas de filo.

Puesto que la vista inclinada 2 muestra ambos planos como filos, una vista adicional proyectada a partir de cada vista de filo mostrará el tamaño verdadero de cada plano. La vista inclinada 3 muestra el tamaño verdadero del plano *ACD*.

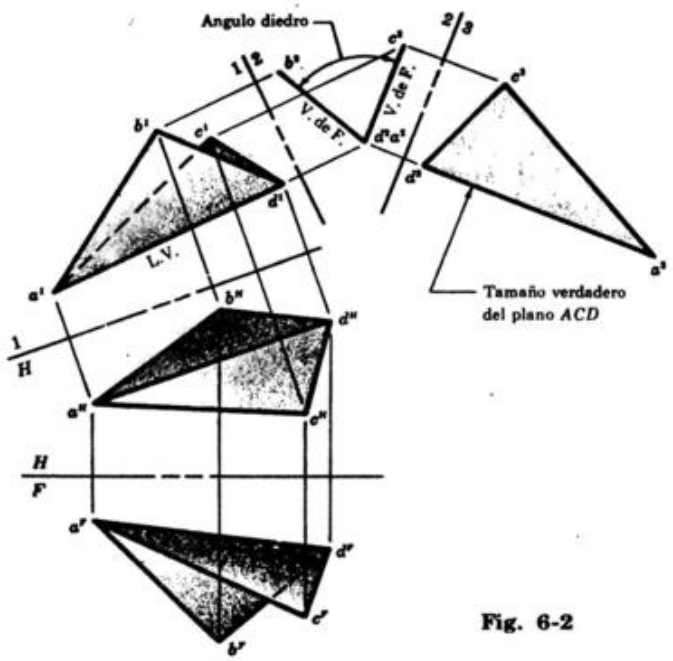


Fig. 6-2

B. La línea de intersección no es dada

Análisis: Si ambos planos pueden verse como filos en una vista, el ángulo diedro puede medirse entre las dos vistas de filo.

Ejemplo: En la Fig. 6-3 se dan los planos *ABC* y *DEF* en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Se dibuja una vista de elevación auxiliar que muestre el plano *DEF* como un filo. El plano *ABC* también se proyecta sobre esta vista. Luego se dibuja una vista inclinada 2 para mostrar el tamaño verdadero del plano *DEF*. Cualquier vista que se proyecte a partir de la vista 2 mostrará el plano *DEF* como un filo. Para que el plano *ABC* aparezca como un filo en la vista inclinada 3, una línea situada en este plano debe aparecer como un punto en esta vista. Para lograr esto se traza una línea desde *B* hasta *Y* paralela a la línea de pliegue 1-2, en la vista 1, de modo que la línea *BY* aparecerá en su longitud verdadera en la vista 2. Esta línea en longitud verdadera en la vista 2 establece la línea de mira para la vista inclinada 3, puesto que muestra la línea *BY* como un punto situado sobre la vista de filo del plano *ABC*. Cualquiera de los dos ángulos formados por las dos vistas de filo puede considerarse el ángulo diedro.

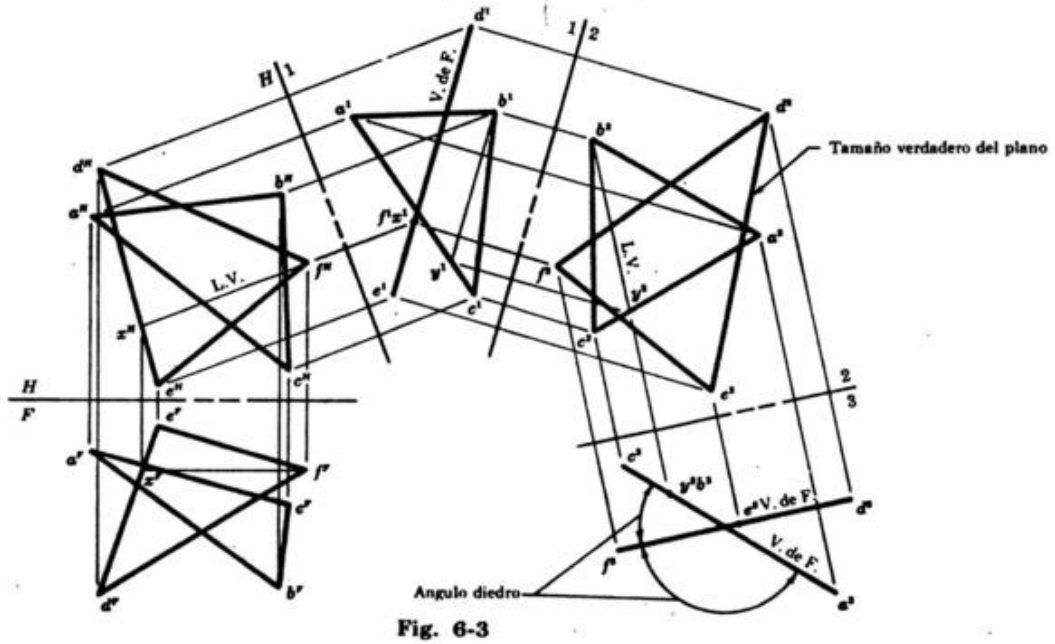


Fig. 6-3

6.2 DETERMINAR EL ANGULO ENTRE UNA LINEA Y UN PLANO

A. Método del plano

Análisis: El ángulo pedido está situado sobre un plano de proyección que es perpendicular al plano dado. Este plano de proyección contendrá a la línea. Una vista que muestre el plano dado como un filo y la línea dada en su longitud verdadera, también mostrará el ángulo entre ellos. Cualquier vista relacionada con la vista que muestra el tamaño verdadero del plano mostrará el plano como un filo. Por tanto, una vista que esté relacionada con la vista del tamaño verdadero del plano y que muestre la longitud verdadera de la línea dada, también mostrará la amplitud verdadera del ángulo que hace la línea con el plano.

Ejemplo: En la Fig. 6-4 se da el plano *ABC* y la línea *XY* en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 para mostrar el plano como un filo. La vista inclinada 2 muestra el tamaño verdadero del plano *ABC*. Proyecte la línea *XY* a las vistas 1 y 2. La línea de pliegue 2-3 se localiza paralela a la línea *XY* en la vista 2, produciéndose así la vista 3, donde la línea se mostrará en su longitud verdadera y el plano *ABC* aparecerá nuevamente como un filo. La amplitud verdadera del ángulo formado entre la línea y el plano puede medirse en esta vista.

El punto de penetración de la línea en el plano puede determinarse por los métodos vistos anteriormente. Una cuidadosa visualización mostrará cuáles segmentos de la línea están ocultos y cuáles son visibles.

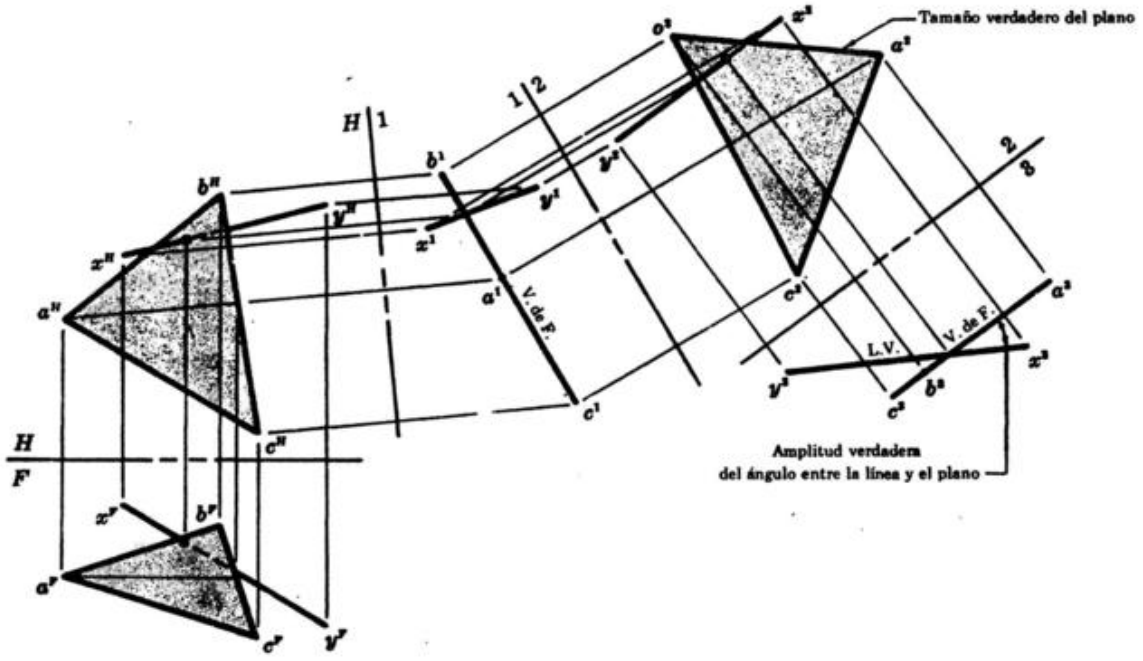


Fig. 6-4. Angulo entre una línea y un plano (Método del plano)

B. Método lineal

Análisis: El método lineal para determinar el ángulo entre una línea y un plano consiste en mostrar la línea en su verdadera longitud, luego como un punto y por último en una vista que muestre nuevamente la longitud verdadera de la línea y el plano aparezca como un filo.

Ejemplo: En la Fig. 6-5 se da el plano *ABC* y la línea *XY* en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Se dibuja una vista inclinada 1 que muestre la línea en su verdadera longitud. Otra vista inclinada 2 muestra la línea como un punto. En la vista 1 se traza una línea *BD* perteneciente al plano, paralela a la línea de pliegue 1-2, de modo que la línea aparecerá en su longitud verdadera en la vista 2. La línea de pliegue 3-2 se localiza perpendicular a la longitud verdadera de *BD*, mostrando el plano *ABC* como un filo y la línea *XY* nuevamente en su longitud verdadera, en la vista 3. La intersección de la línea y el plano, en esta vista, determina la amplitud verdadera del ángulo formado entre ellos.

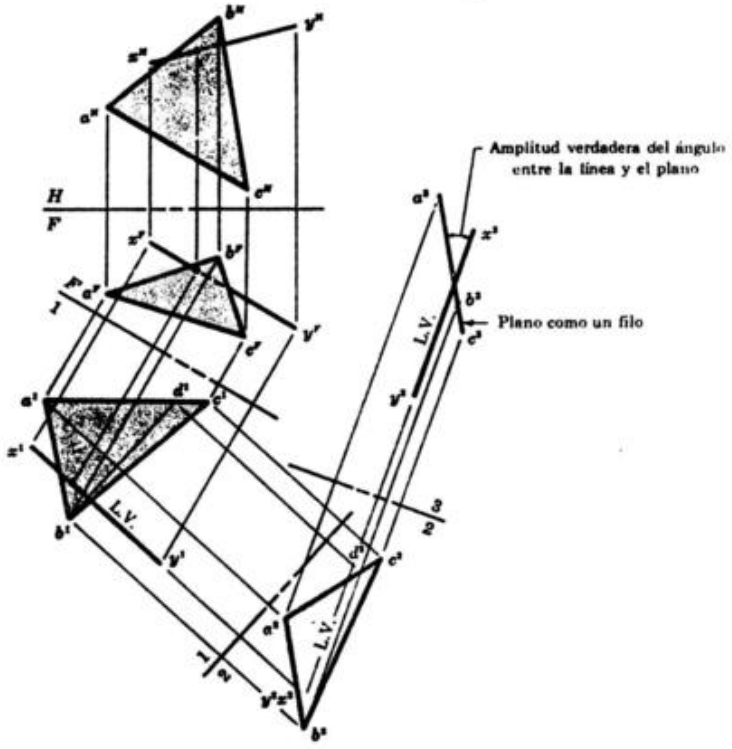


Fig. 6-5. Angulo entre una línea y un plano (Método lineal)

C. Método del ángulo complementario

Análisis: Si el complemento del ángulo pedido se puede determinar, entonces el ángulo pedido también se conocerá. Por tanto, escoja un punto cualquiera situado sobre la línea dada y por él trace una línea perpendicular al plano dado. Esta perpendicular junto con la línea dada, determinan un plano. Muestre el tamaño verdadero de este último plano, y el ángulo pedido será igual a 90° menos la amplitud real del ángulo complementario.

Ejemplo: En la Fig. 6-6 se da el plano *ABC* y la línea *XY* en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Trace una línea en verdadera longitud en cada una de las vistas del plano *ABC*. Desde el punto *X*, en cada vista, trace una línea de longitud indefinida, *XZ*, perpendicular a la línea de longitud verdadera. El plano *ABC* puede omitirse ahora puesto que no importa dónde la línea *XY* atraviesa el plano. Construya una vista de elevación auxiliar que muestre el plano *XYZ* como un filo. Dibuje una vista inclinada 2 que muestre *XYZ* en su verdadero tamaño. El ángulo complementario *YXZ* se ve en su amplitud real en esta vista. Construya un ángulo de 90° en el punto *X*, que incluya el ángulo complementario. El ángulo recto menos el ángulo complementario determinará el ángulo entre la línea *XY* y el plano *ABC*, que es el ángulo pedido.

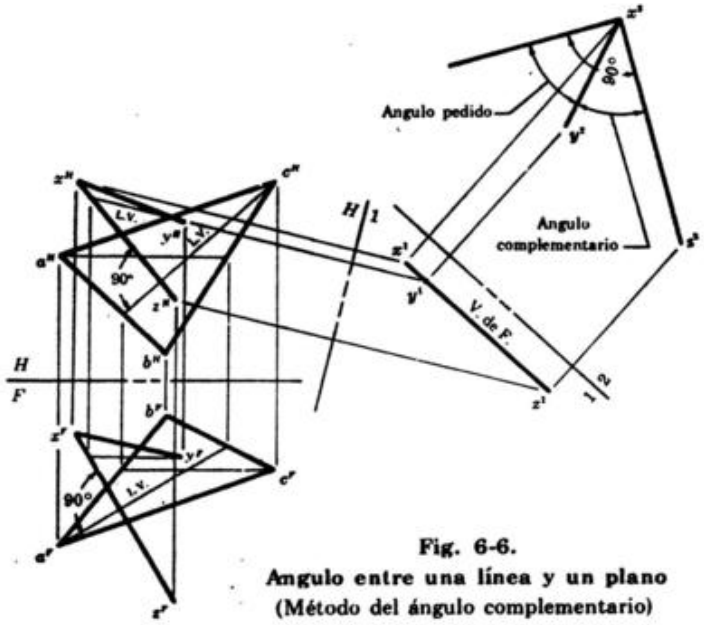


Fig. 6-6.
Angulo entre una línea y un plano
(Método del ángulo complementario)

Problemas resueltos

1. Dado: *ABD* y *ACD* representan dos planos que se cortan, como se muestra en la Fig. 6-7. El punto *B* está 6′ al este, 4′ al norte y 6′ por encima de *A*. El punto *C* está 6′ al este, 3′ al sur y 6′ por encima de *A*. El punto *D* está localizado 10′ exactamente al este, y 3′ por encima de *A*. Escala: $\frac{1}{8}'' = 1'—0''$.

Problema: Determinar el ángulo diedro formado por la intersección de los dos planos.

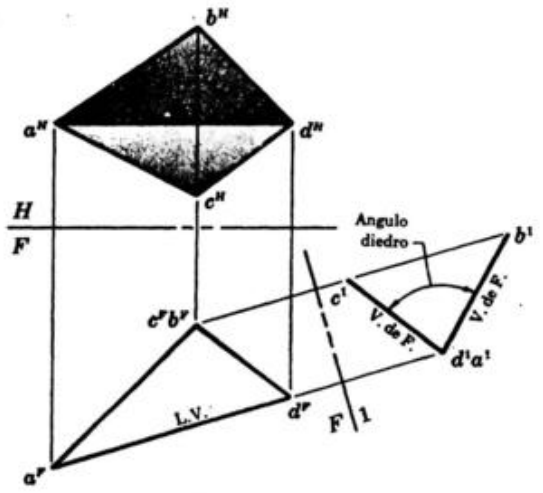


Fig. 6-7

Solución:

Utilizando los datos construya las vistas de planta y frontal. Puesto que la línea común de intersección entre los dos planos es una línea frontal, aparecerá en su verdadera longitud en la vista frontal. Coloque la línea de pliegue *F*-1 perpendicular a la línea de intersección *AD* y proyecte ambos planos sobre la vista inclinada. Ambos planos aparecerán como filos en la vista 1 y el ángulo diedro se medirá en esta vista. *Resp.* Angulo diedro = 82°

2. Dado: Una lámina metálica se dobla para formar dos planos, *ABC* y *ABD*. Ver la Fig. 6-8. El punto *B* está localizado 6′ exactamente al este y a la misma elevación que *A*. El punto *C* está 8′ al este, 2′ al sur y 2′ por encima de *A*. El punto *D* está 3′ al este, 3′ al sur y 3′ por debajo de *A*. Escala: $\frac{3}{16}'' = 1'—0''$.

Problema: Determine el ángulo diedro formado entre los dos planos. Muestre el tamaño verdadero de cada plano.

Solución:

Construya la vista de planta y la vista de elevación frontal de ambos planos. Puesto que la línea común de intersección entre los dos planos es una línea frontal-horizontal, una vista de perfil mostrará la línea como un punto y los planos como dos filos. El ángulo diedro se mide en la vista de perfil. Dibuje las vistas inclinadas 1 y 2 para obtener el tamaño verdadero de cada plano. *Resp.* Angulo diedro = 90°

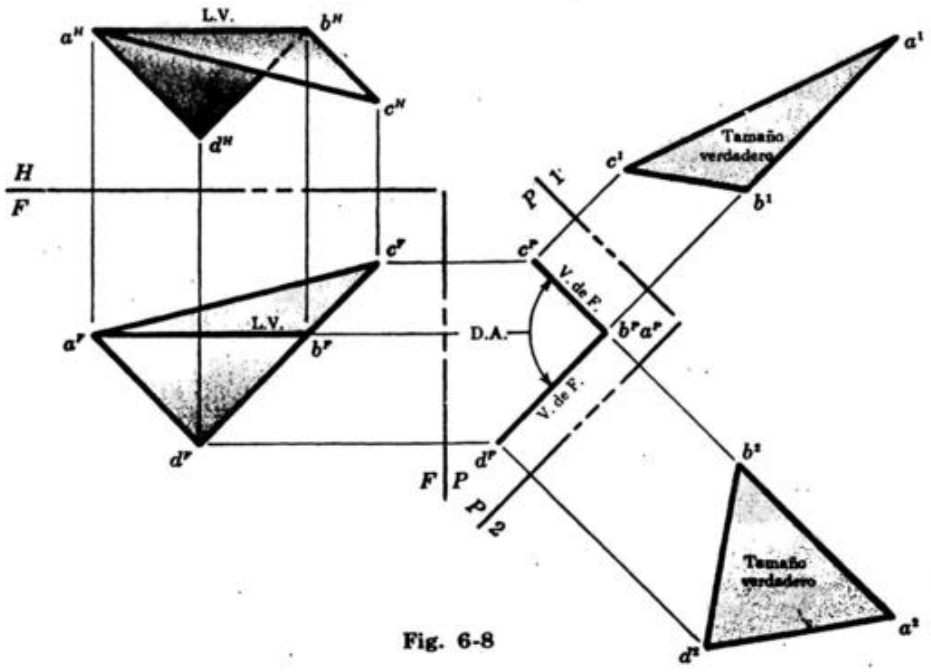


Fig. 6-8

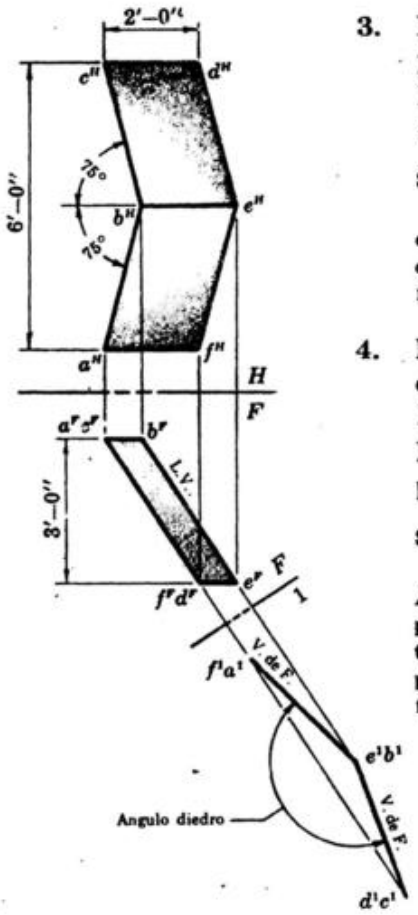


Fig. 6-9

3. Dado: La vista de planta y la vista de elevación frontal del parabrisas de un avión. Ver la Fig. 6-9. Escala: $\frac{1}{4}'' = 1'—0''$.
Problema: Determine el ángulo diedro formado por las dos caras de la ventana.

Solución:

Puesto que el marco metálico *BE* es una línea frontal, aparecerá en su verdadera longitud en la vista frontal. Construya una vista inclinada que muestre la línea de intersección como un punto y los dos planos como filos. El ángulo diedro se mide en esta vista. *Resp.* Angulo diedro = 155°

4. Dado: La Fig. 6-10 muestra la vista de planta y la vista de elevación frontal de una parte de un techo a cuatro aguas. Escala: $\frac{1}{16}'' = 1'—0''$.
Problema: Determine el ángulo diedro formado entre los planos *A* y *B*.

Solución:

Localice un punto *D* sobre el plano *B*. Los dos planos involucrados son *ABC* y *ABD*. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 que muestre ambos planos y haga ver la línea de intersección *AB* en su verdadera longitud. Construya una vista inclinada 2 que muestre la línea de intersección como un punto y los planos como dos filos. El ángulo formado entre las dos vistas de filo es el ángulo diedro. *Resp.* Angulo diedro = 113°30'

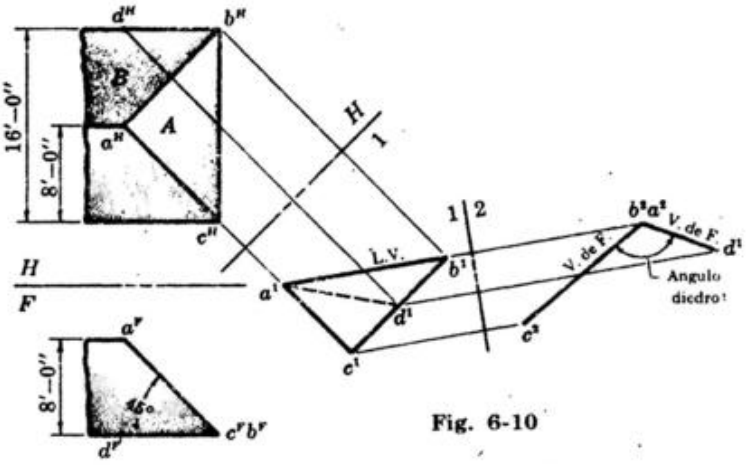


Fig. 6-10

5. Dado: Los dos planos *ABC* y *ABD* se cortan a lo largo de la línea *AB*. El punto *B* está 4' al este, 8' al sur y 8' por debajo de *A*. El punto *C* está 11' al este, 2' al norte y 10' por debajo de *A*. El punto *D* está localizado 7' exactamente al norte y 11' por debajo de *A*. Ver la Fig. 6-11. Escala: $\frac{1}{16}'' = 1'—0''$.
Problema: Determine el ángulo diedro formado entre los dos planos.

Solución:

Usando los datos, dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal de los dos planos. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 que muestre ambos planos y haga ver la línea de intersección en su verdadera longitud. Construya una vista inclinada que muestre ambos planos como filos y la línea de intersección como un punto. El ángulo diedro se mide en esta vista.
Resp. Angulo diedro = 50°

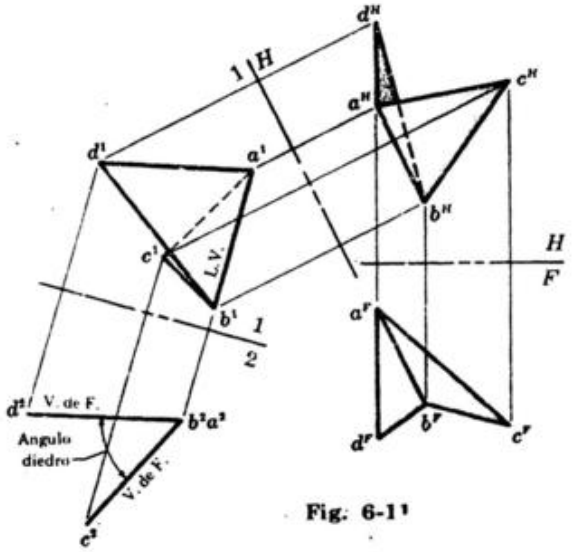


Fig. 6-11

6. Dado: La Fig. 6-12 muestra la vista de planta y la vista de elevación frontal de una tolva que es alimentada por un tubo representado por la línea media XY. Escala: $\frac{3}{16}'' = 1'—0''$.

Problema: Determine el ángulo que hace el tubo con la tolva.

Solución:

Dibuje una vista inclinada 1 para mostrar la línea XY y el tamaño verdadero de la cara de la tolva cortada por el tubo. Coloque la línea de pliegue 1-2 paralela a la línea XY en la vista 1. Construya una vista inclinada 2 para obtener la longitud verdadera de XY y el plano como un filo. El ángulo pedido se mide en esta vista.
Resp. Angulo = 21°30'

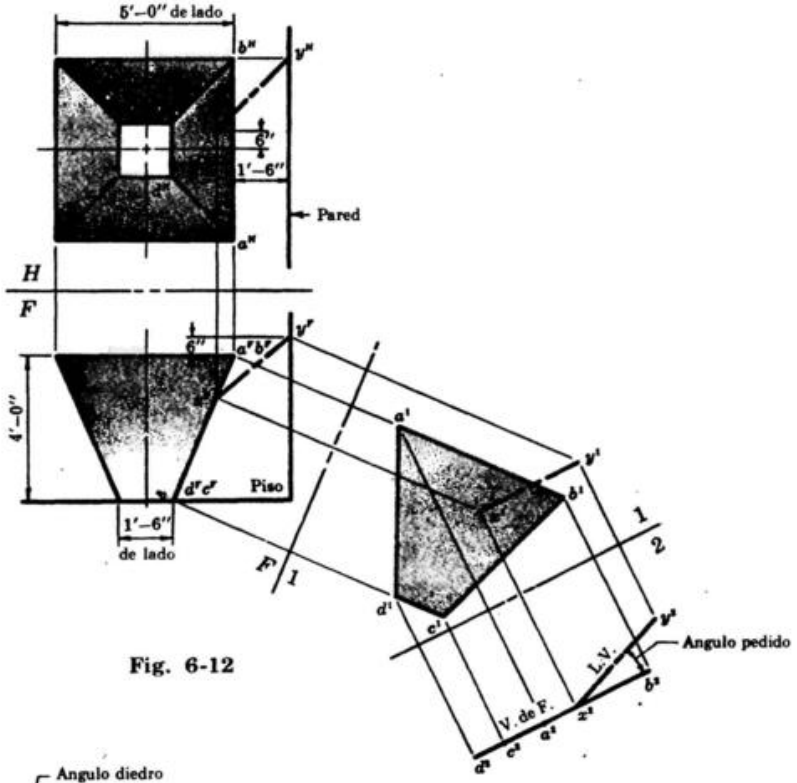


Fig. 6-12

7. Dado: Una pirámide triangular de 2" de altura tiene como base un triángulo equilátero de 2" de lado, como se muestra en la Fig. 6-13. Escala: $\frac{1}{2}'' = 1''$.

Problema: Determine el ángulo diedro formado por dos caras laterales cualesquiera.

Solución:

Utilizando los datos, construya la vista de planta y la vista de elevación frontal de la pirámide. Dibuje una vista inclinada para mostrar la línea común de intersección en su longitud verdadera. Localice un punto adicional sobre cada uno de los dos planos, en esta misma vista. Dibuje una vista inclinada 2 para obtener la vista de punta de la línea de intersección. Los dos planos aparecerán como filos en esta vista y el ángulo entre las vistas de filo será el ángulo diedro que se pide.
Resp. Angulo diedro = 68°

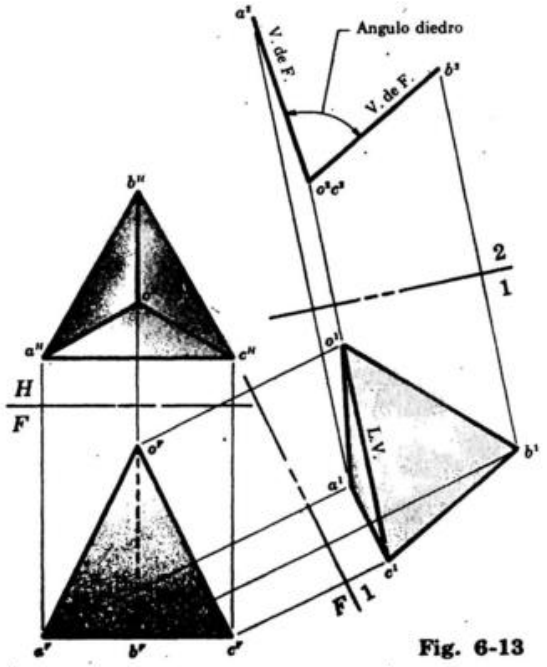


Fig. 6-13

8. Dado: Una compuerta está determinada por el plano *ABCD* y a través de ella debe pasar un cable de mando *XY*. El punto *B* está 1′ al oeste, 2′ al norte y 3′ por debajo de *A*. El punto *C* está 4′ al oeste, 1′ al sur y 6″ por debajo de *A*. El punto *D* está 5′ al oeste, 1′ al norte y 3′—6″ por debajo de *A*. El punto *X* está 1′ exactamente al oeste y 6″ por encima de *A*. El punto *Y* está 3′—6″ al oeste, 9″ al norte y 4′ por debajo de *A*. Ver la Fig. 6-14. Escala: $\frac{1}{4}'' = 1'—0''$.

Problema: Use el método del plano para determinar el ángulo formado entre el cable y la compuerta. Muestre la visibilidad correcta.

Solución:

Trace la línea *XY* y el plano *ABCD* en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Construya una vista de elevación auxiliar 1 para mostrar la línea *XY* y la vista de filo del plano *ABCD*. La vista inclinada 2 mostrará el tamaño verdadero del plano. Coloque la línea de pliegue 2-3 paralela a *XY* en la vista 2 y proyecte las dos líneas y el plano a la vista inclinada 3. La vista 3 mostrará el cable *XY* en su verdadera longitud y la compuerta *ABCD* como un filo. El ángulo entre el cable y la compuerta se mide en esta vista. Por medio de una cuidadosa visualización se determinará la visibilidad correcta. *Resp.* Angulo = 16°30′

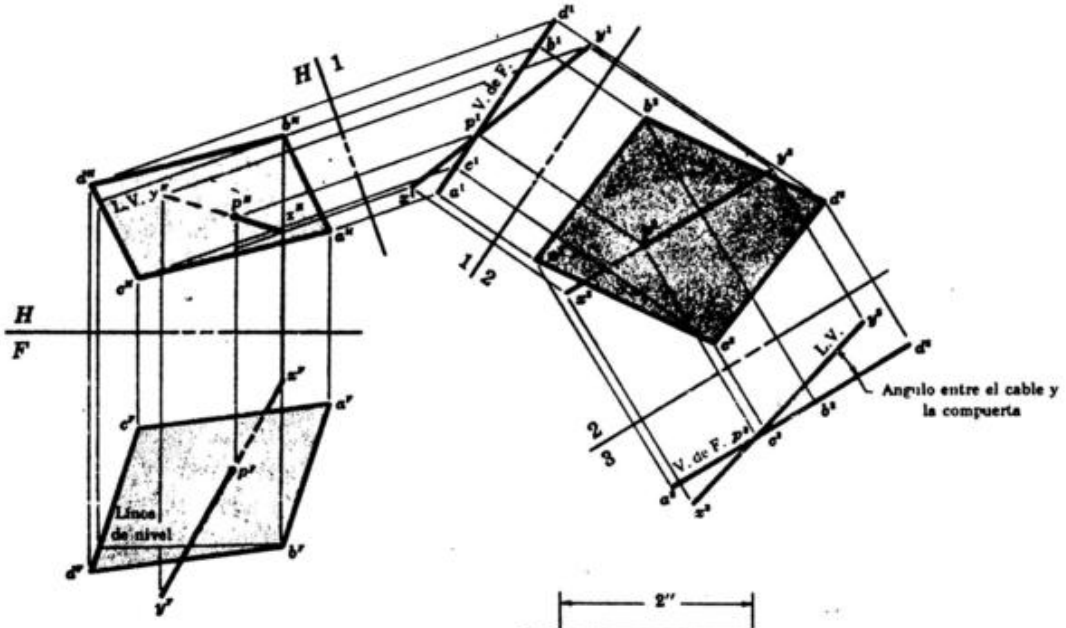


Fig. 6-14

9. Dado: La base de una pirámide rectangular recta mide 2″ de largo por $1\frac{1}{2}''$ de ancho. El vértice de la pirámide está localizado $2\frac{1}{2}''$ por encima de la base, pero la pirámide está truncada 1″ por encima de la base, formando un ángulo de 30° con un plano horizontal. Ver la Fig. 6-15. Escala: $\frac{1}{2}'' = 1''$.

Problema: Determine el ángulo diedro formado entre la superficie del corte y la cara lateral frontal.

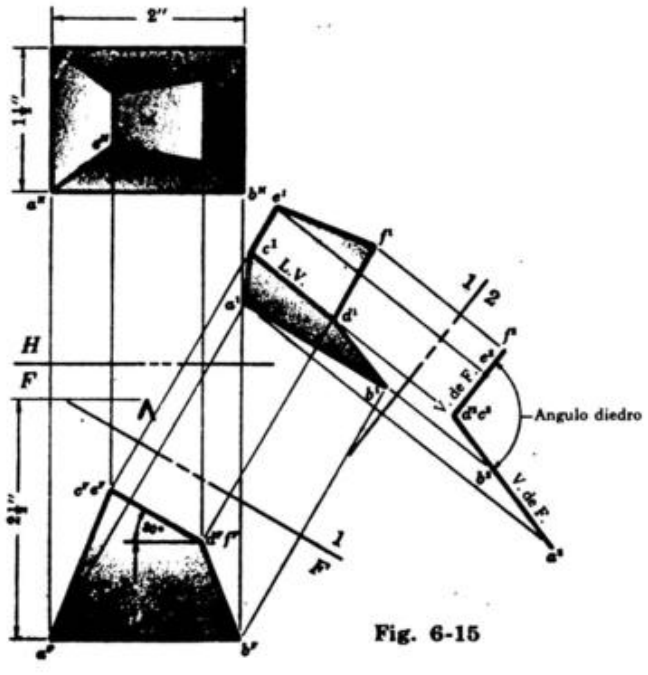


Fig. 6-15

Solución:

Utilizando los datos, construya la vista de planta y la vista de elevación frontal de la pirámide truncada. Dibuje una vista inclinada 1 que muestre la línea común de intersección, *CD*, en su verdadera longitud. Dibuje una vista inclinada 2 que muestre ambos planos como filos. El ángulo medido entre las dos vistas de filo es el ángulo diedro. *Resp.* Angulo = 105°

10. Dado: Un túnel de una mina, *XY*, se dirige en la dirección de una veta de carbón, determinada por el plano *ABC*. El punto *B* está 40′ al este, 40′ al norte y 60′ por debajo de *A*. El punto *C* está 65′ al este, 30′ al sur y 20′ por debajo de *A*. El punto *X* está 80′ al este, 40′ al norte y 20′ por encima de *A*. El punto *Y* está 55′ al este, 20′ al norte y a la misma elevación que *A*. Ver la Fig. 6-16. Escala: 1″ = 60′.

Problema: ¿Con qué ángulo encontrará el túnel la veta de carbón? ¿Cuánto se debe prolongar el túnel para llegar hasta la veta? Si el punto *A* está a una elevación de 500′, ¿con qué elevación llegará el túnel a la veta?

Solución:

Usando los datos, construya la vista de planta y la vista de elevación frontal del plano *ABC* y de la línea *XY*. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 para mostrar el plano como un filo. Construya una vista inclinada 2 que muestre la línea *XY* y el tamaño verdadero del plano *ABC*. Localice la línea de pliegue 2-3 paralela a la línea *XY* en la vista 2 y proyecte sobre otra vista inclinada que muestre la longitud verdadera de la línea *XY* y el plano como un filo. Prolongue la línea *XY* hasta que corte la vista de filo del plano, en la vista 3. La prolongación del túnel y el ángulo que ésta hace con el plano se miden en esta vista. La altura del punto *P* puede medirse en la vista de elevación 1 o en la vista de elevación frontal.

Resp. Angulo = 74°30′, prolongación del túnel = 38′, altura del punto *P* = 480′

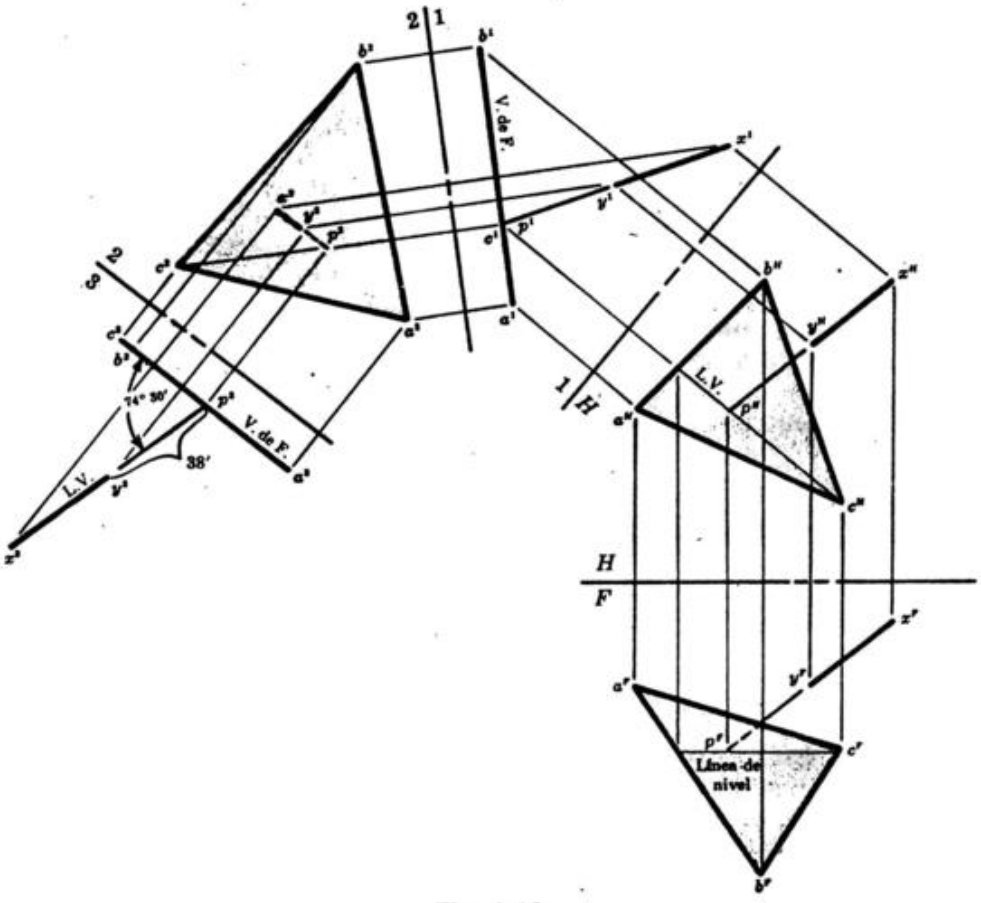


Fig. 6-16

11. Dado: Dos planos, *ABCD* y *ABEF* están localizados así: *A*(6, $2\frac{1}{2}$, 8), *B*($4\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 6), *C*(7, 3, 8), *D*($5\frac{1}{2}$, 1, 6), *E*(5, $2\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{2}$), *F*($3\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$). Ver la Fig. 6-17.

Problema: Determine la amplitud verdadera del ángulo diedro formado entre los dos planos.

Solución:

Usando los datos, construya la vista de planta y la vista de elevación frontal de los dos planos. Dibuje una vista inclinada 1 que muestre ambos planos y haga ver la línea *AB* en su verdadera longitud. Construya una vista inclinada 2 para mostrar la línea de intersección como un punto y los planos como dos filos. El ángulo diedro se mide en esta vista.

Resp. Angulo diedro = 173°30′

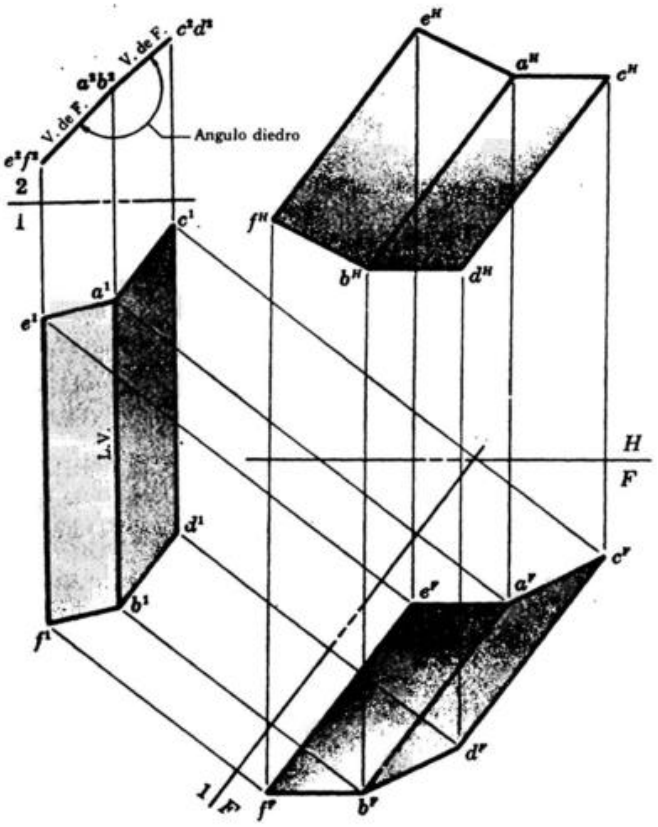


Fig. 6-17

12. Dado: La Fig. 6-18 muestra la vista de planta y la vista de elevación frontal de tres vientos de alambre que están asegurados a tres planos perpendiculares entre sí. Escala: 1″ = 20′.

Problema: Encuentre la longitud verdadera de cada viento y el ángulo que hace cada viento con el plano al cual está asegurado.

Solución:

Construya la vista de elevación auxiliar 1 para obtener la longitud verdadera y la pendiente del viento *AD*. Dibuje una vista inclinada 2 para obtener la longitud verdadera de *BD*. Esta vista mostrará también el ángulo entre el viento *BD* y la pared posterior. Construya la vista de perfil de *CD* y luego proyecte a la vista inclinada 3, la cual mostrará la longitud verdadera de *CD* y el ángulo que el viento *CD* hace con la pared lateral.

Resp. L.V. de *AD* = 21′, pendiente de *AD* = 54°30′
L.V. de *BD* = 14′, ángulo α = 58°30′
L.V. de *CD* = 21′, ángulo θ = 74°

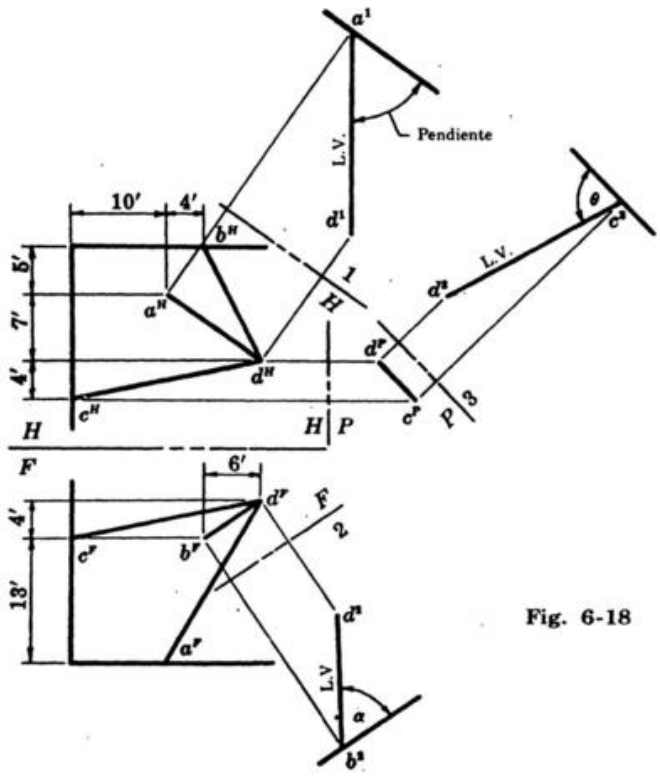


Fig. 6-18

13. Dado: El plano ABC y la línea XY están localizados así: $A(1, 5, 6)$, $B(2, 3, 7\frac{1}{2})$, $C(3, 4\frac{1}{4}, 6)$, $X(1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4})$, $Y(2\frac{1}{4}, 4\frac{1}{4}, 6\frac{1}{2})$. Ver la Fig. 6-19.

Problema: Determine el ángulo que hace la línea XY con el plano ABC. Use el método del ángulo complementario.

Solución:

Utilizando los datos, dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal del plano ABC y de la línea XY. Localice una línea en verdadera longitud, en ambas vistas. Desde el punto X trace una línea de longitud indefinida perpendicular a la línea en verdadera longitud, en ambas vistas. Por conveniencia, trace la perpendicular hasta Z, en la vista frontal, de modo que YZ aparecerá en su verdadera longitud en la vista de planta. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 para mostrar el plano XYZ como un filo. Dibuje una vista inclinada 2 para mostrar el tamaño verdadero del plano XYZ. En la vista 2, una línea que parta de X y sea perpendicular a XZ representará la vista de filo del plano ABC, debido a que XZ es perpendicular al plano ABC. El ángulo formado entre XY y la línea perpendicular a XZ será el ángulo entre la línea XY y el plano ABC, que se pide.

Resp. Angulo = 52°30′

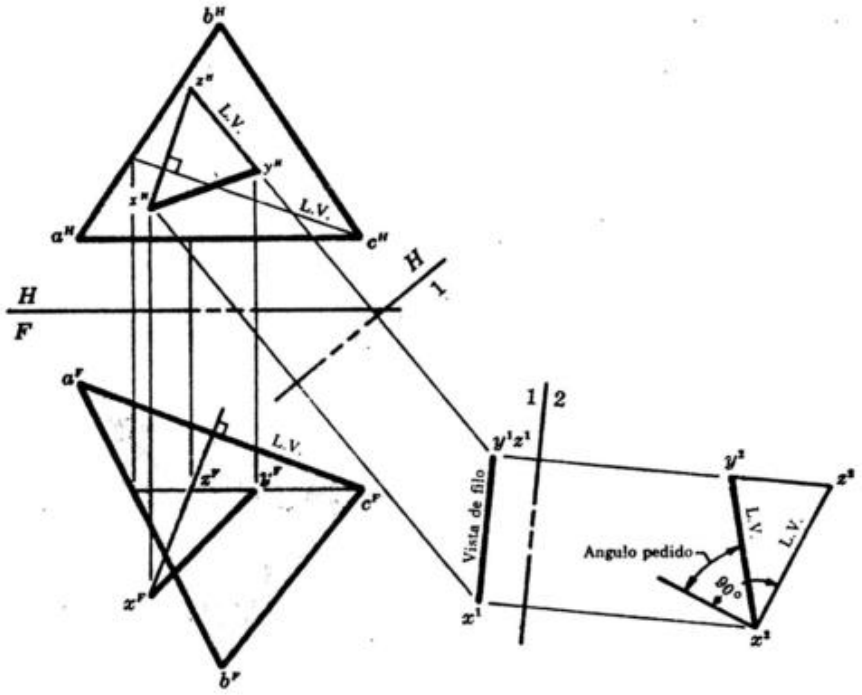


Fig. 6-19

Problemas propuestos

En cada uno de los siguientes problemas (14 a 18) determine el ángulo diedro formado por los planos ABC y BCD. En cada uno de estos problemas la línea BC es común a ambos planos.

Ver en el Art. 1.7 la presentación de problemas por medio de coordenadas.

14. $A(1, 1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$, $B(1, 4, 6\frac{1}{2})$, $C(3, 3, 5\frac{1}{2})$, $D(2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 5)$ *Resp.* 18°30′

15. $A(1, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$, $B(1\frac{1}{2}, 2, 4)$, $C(2\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$, $D(2\frac{1}{2}, 2, 4)$ *Resp.* 123°30′

16. $A(2\frac{1}{2}, 3, 6)$, $B(\frac{1}{2}, 3, 5\frac{1}{2})$, $C(1\frac{1}{2}, 1, 4\frac{1}{2})$, $D(3, 2, 4\frac{1}{2})$ *Resp.* 27°30′

17. $A(1, \frac{1}{2}, 6)$, $B(3, 3, 6\frac{1}{2})$, $C(1, 2\frac{1}{2}, 4)$, $D(3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{4}, 5\frac{1}{4})$ *Resp.* 168°

18. $A(2\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 6)$, $B(1\frac{1}{2}, 3, 5)$, $C(4, \frac{1}{2}, 5)$, $D(2\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 7)$ *Resp.* 19°

19. Dos planos que se cortan, *ABC* y *BCD*, como se muestra en la Fig. 6-20. Escala: $\frac{1}{4}'' = 1'-0''$. Determine el ángulo diedro entre los dos planos. *Resp.* Angulo = 100°

20. Dos planos *ABD* y *ACD*. El punto *B* está localizado 6' al este, 4' al norte y 6' por encima de *A*. El punto *C* está 6' al este, 3' al sur y 3' por encima de *A*. El punto *D* está 10' exactamente al este y 3' por encima de *A*. Escala: $\frac{1}{4}'' = 1'-0''$. Determine el ángulo diedro formado por los dos planos. *Resp.* Angulo = 114°

21. La Fig. 6-21 muestra un tetraedro. Escala: $12'' = 1'-0''$. Determine al ángulo que la línea *AB* hace con el plano *ACD*. Utilice únicamente las vistas de filo necesarias para hallar la solución. *Resp.* Angulo = 51°

22. Dos planos, *ABC* y *BCD*, están localizados así: *A*(3, 3, 7), *B*(4, 5, 7), *C*(4, 3, 6), *D*(5, 3, 7). Determine el ángulo diedro entre los dos planos. *Resp.* Angulo = 95°

23. La vista de planta y la vista de elevación frontal del machón de un puente se muestran en la Fig. 6-22. Escala: $\frac{3}{16}'' = 1'-0''$. Determine el ángulo diedro formado entre los planos *A* y *B*. *Resp.* Angulo = 95°

24. Escala: $\frac{3}{16}'' = 1'-0''$. Utilizando la misma figura del problema 23, determine el ángulo diedro entre los planos *B* y *C*. *Resp.* Angulo = 100°

25. La Fig. 6-23 muestra la tolva que suministra metal a unos vagones de carga. Escala: $\frac{1}{4}'' = 1'-0''$. Determine el ángulo diedro entre los lados *A* y *B*. *Resp.* Angulo = 99°

26. Utilizando la misma figura del problema 25 determine el ángulo diedro formado por los planos *A* y *C*. Escala: $\frac{1}{4}'' = 1'-0''$. *Resp.* Angulo = 27°30'

27. Los planos *ABC* y *DEF*. El punto *B* está 8' al este, 4' al norte y 9' por encima de *A*. El punto *C* está 12' al este, 2' al sur y 4' por encima de *A*. El punto *D* está 2' al este, 4' al norte y 8' por encima de *A*. El punto *E* está 10' al este, 4' al sur y 1' por encima de *A*. El punto *F* está 14' al este, 5' al norte y 4' por encima de *A*. Escala: $\frac{1}{4}'' = 1'-0''$. Determinar el ángulo diedro entre los dos planos. *Resp.* Angulo = 44°

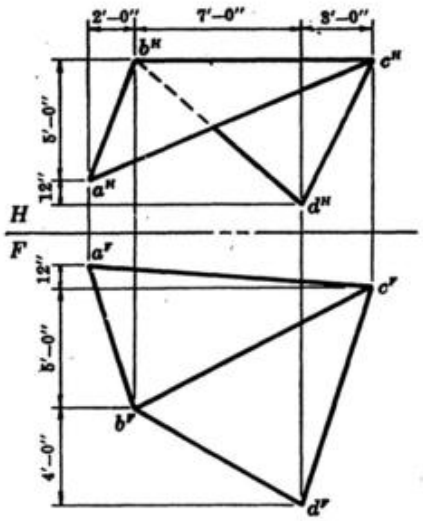


Fig. 6-20

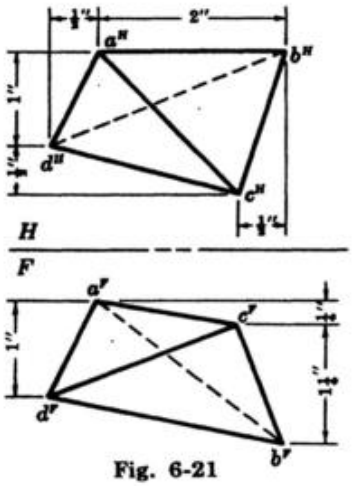


Fig. 6-21

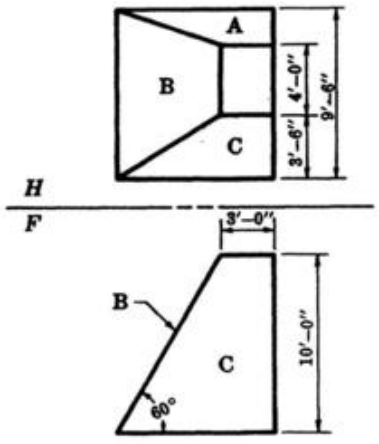


Fig. 6-22

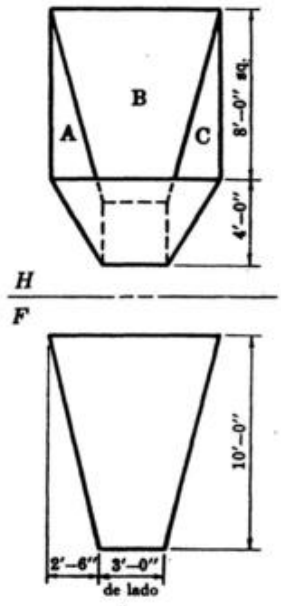


Fig. 6-23

28. Un adaptador hecho de lámina de acero se muestra en la Fig. 6-24. Escala: $\frac{1}{4}'' = 1'—0''$. Determinar el ángulo diedro entre los planos *A* y *B*. *Resp.* Angulo = 80°

29. Usando la misma figura del problema 28, determine el ángulo diedro formado por los planos *B* y *C*. Escala: $\frac{1}{4}'' = 1'—0''$. *Resp.* Angulo = 106°

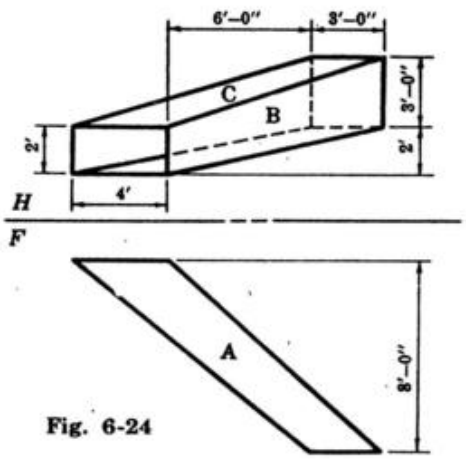


Fig. 6-24

En cada uno de los siguientes problemas (30 a 35) determine la amplitud verdadera del ángulo formado por la línea *XY* y el plano *ABC*. Use el método lineal o bien el método del plano.

Ver en el Art. 1.7 la presentación de problemas por medio de coordenadas.

30. $A(1, 1\frac{1}{2}, 5)$, $B(2, 2\frac{1}{2}, 4)$, $C(3\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$, $X(1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4\frac{1}{4})$, $Y(3, 2, 4\frac{1}{2})$

31. $A(1\frac{1}{4}, 2, 3\frac{1}{2})$, $B(2\frac{1}{2}, 1, 5\frac{1}{4})$, $C(4, 1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$, $X(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, 5)$, $Y(3\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4})$

32. $A(1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 5)$, $B(2, 3\frac{1}{4}, 4\frac{1}{2})$, $C(3\frac{1}{2}, 1, 6)$, $X(1, 2, 5)$, $Y(3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, 4)$

33. $A(\frac{1}{4}, 3\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$, $B(1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 7)$, $C(1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$, $X(2, 2\frac{1}{4}, 4\frac{1}{2})$, $Y(1\frac{1}{2}, 3, 6)$

34. $A(1, 3\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$, $B(2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{4})$, $C(3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{4}, 6\frac{1}{4})$, $X(1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 5\frac{1}{4})$, $Y(3, 3\frac{1}{4}, 6\frac{1}{2})$

35. $A(1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$, $B(2, 3, 5\frac{1}{4})$, $C(4, 2, 5)$, $X(1, 2, 5)$, $Y(3, 2, 5\frac{1}{4})$

Resp. 30: 38°30′ 32: 37°30′ 34: 43°
Resp. 31: 25° 33: 22°30′ 35: 26°30′

36. La Fig. 6-25 muestra una pirámide cortada por una línea *XY*. Escala: 12″ = 1′—0″. Determine el ángulo que hace la línea con el plano *OCD*. *Resp.* Angulo = 69°30′

37. La línea *XY* representa una de las varillas que soportan dos carteleras que se cortan, como se muestra en la Fig. 6-26. Escala: $\frac{1}{8}'' = 1'—0''$. Determine el ángulo que la varilla hace con la cartelera en el sujetador *Y*. *Resp.* Angulo = 36°

38. Utilizando los mismos datos del problema 37, determine el ángulo que la varilla hace con la cartelera en el sujetador *X*. Escala: $\frac{1}{8}'' = 1'—0''$. *Resp.* Angulo = 51°30′

39. La Fig. 6-26 muestra la vista de planta y la vista de elevación frontal de una tolva, la cual se alimenta por medio de un tubo, representado por su línea media *XY*. Escala: $\frac{3}{8}'' = 1'—0''$. Determine el ángulo que el tubo hace con la pared. *Resp.* Angulo = 37°30′

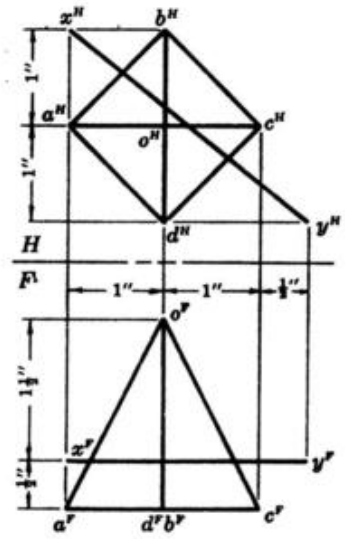


Fig. 6-25

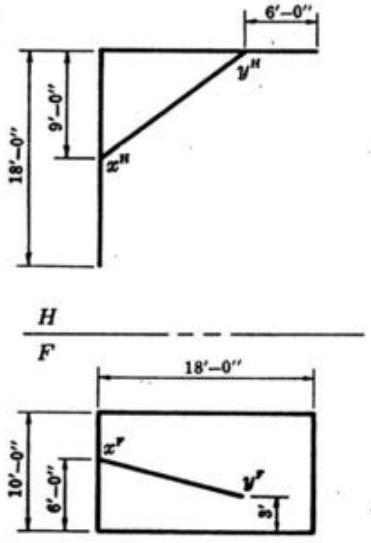


Fig. 6-26

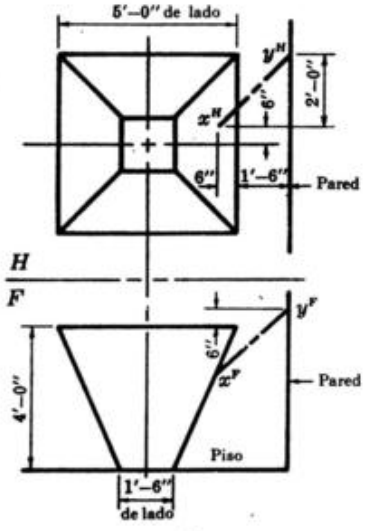


Fig. 6-27

40. La Fig. 6-28 muestra una antena de televisión asegurada por medio de dos varillas al techo de una casa. Escala: $\frac{1}{8}'' = 1'—0''$. ¿Qué ángulos hacen las varillas con el techo?
Resp. $XY = 70°$, $XZ = 48°$

41. La Fig. 6-29 muestra una pirámide exagonal regular. Escala: $12'' = 1'—0''$. Determine el ángulo diedro entre los planos AOB y AOF. *Resp.* Angulo = 125°

42. Utilizando la misma figura del problema 41, determine el ángulo formado por la línea OC y el plano AOF. Escala: $12'' = 1'—0''$. *Resp.* Angulo = 45°

43. Hay una posibilidad de interferencia entre un tubo XY y una placa $ABCD$. Determine si existe o no interferencia y encuentre el ángulo entre el tubo y la placa. $X(1\frac{1}{2}, 5, 7\frac{1}{2})$, $Y(3, 5\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2})$, $A(2, 6, 7)$, $B(3, 4\frac{1}{2}, 8)$, $C(4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2})$, $D(3\frac{1}{2}, 6, 6\frac{1}{2})$. Muestre el punto de penetración de la línea en el plano, en todas las vistas. Muestre también la visibilidad correcta. Ver en el Art. 1.7 el sistema de coordenadas para la presentación de problemas.
Resp. No hay interferencia. Angulo = 26°

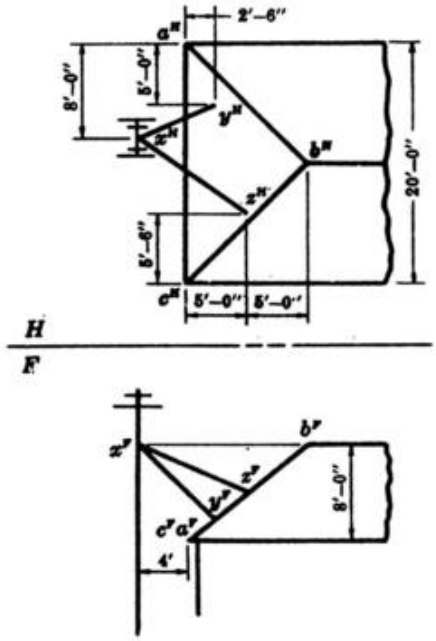


Fig. 6-28

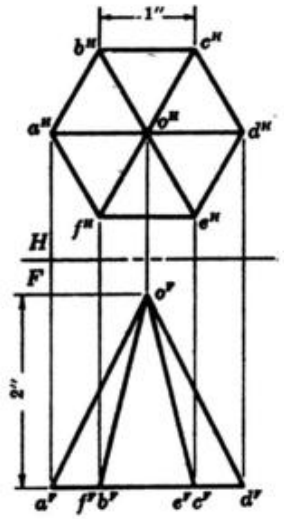


Fig. 6-29

Capítulo 7

Revolución

El método utilizado para resolver problemas de geometría descriptiva está basado en lo que se llama "cambio de posición", como se expuso en los capítulos anteriores. Las diferentes vistas que se obtuvieron se basaron en el hecho de que el observador asume diferentes puntos de vista respecto a un punto, una línea o un plano, fijos en el espacio. Sin embargo, muchos problemas básicos pueden resolverse haciendo que el observador permanezca quieto, mientras que el objeto se gira hasta una posición que revele cierta información que se necesita.

Aunque la mayoría de los problemas del espacio se resuelve por el método de "cambio de posición", a veces es más conveniente para el ingeniero resolver un problema usando la revolución. Por consiguiente, un conocimiento completo de ambos métodos reportará grandes ventajas al ingeniero. Queda entonces a su criterio, qué método debe usar para cada tipo de problema.

7.1 PRINCIPIOS BASICOS DE LA REVOLUCION

Para que el estudiante pueda resolver un problema por revolución debe, primero que todo, conocer ciertos principios fundamentales. Un cuidadoso conocimiento de estos conceptos básicos hará de la revolución un instrumento vital para la resolución de problemas relativos al espacio.

Los siguientes son los principios fundamentales de la revolución:

(*1*) Un punto puede girar únicamente alrededor de una línea recta que haga las veces de eje.

(*2*) Un punto gira sobre un plano perpendicular al eje.

(*3*) Un punto gira en una trayectoria circular, cuyo centro es el eje.

(*4*) La vista de punta del eje mostrará la trayectoria circular, del punto que gira, en su forma verdadera.

(*5*) Cuando el eje aparece en su longitud verdadera, la trayectoria del punto aparecerá como una línea recta, cuya longitud es igual al diámetro de la trayectoria circular.

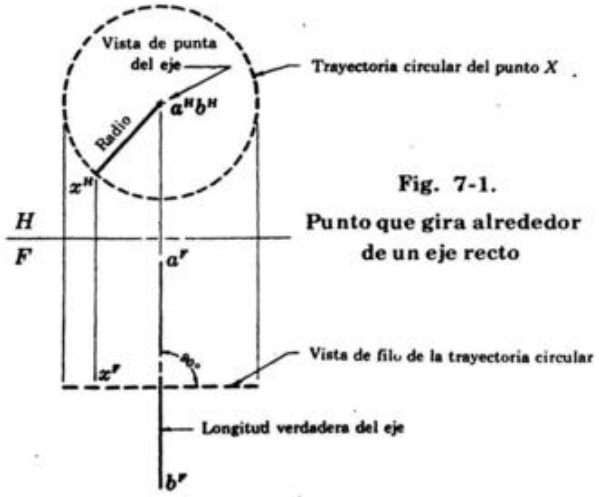


Fig. 7-1.
Punto que gira alrededor de un eje recto

El estudiante debe observar la Fig. 7-1 hasta estar absolutamente seguro de que comprende a conciencia los principios fundamentales de la revolución. Por supuesto, la falta de comprensión de estos principios básicos puede redundar en suposiciones erróneas.

En muchos problemas de geometría descriptiva el eje alrededor del cual gira un

punto no aparece en su longitud verdadera ni en la vista de planta ni en la vista de elevación frontal. Por tanto, se debe dibujar una nueva vista que muestre la longitud verdadera del eje y a partir de ésta, una vista adicional que mostrará el eje como un punto.

En la Fig. 7-2 se muestra un eje oblicuo tanto en la vista de planta como en la vista de elevación frontal. El punto X, que gira alrededor de este eje, también está localizado en las dos vistas dadas. Usando el método de "cambio de posición", se dibuja una nueva vista que muestre el eje AB en su verdadera longitud y el punto X localizado a una distancia fija del eje. La vista inclinada 2 determina la vista de punta del eje y la trayectoria circular del punto X, cuando éste gira alrededor del eje.

Se desea localizar las posiciones más alta y más baja del punto X cuando gira alrededor del eje oblicuo. Los puntos extremos de la trayectoria circular, mostrada como un filo en la vista 1, determinarán estas posiciones. En la vista 2 las posiciones más baja y más alta del punto X se designan por medio de los subíndices adicionales MA y MB.

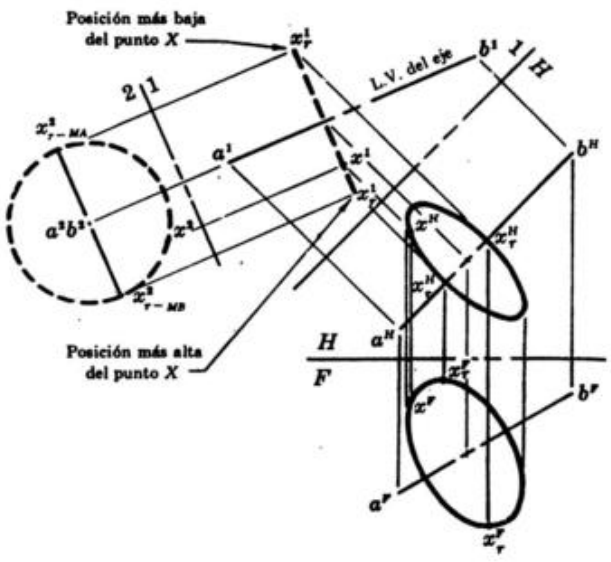


Fig. 7-2.
Punto que gira alrededor de una línea oblicua

7.2 ENCONTRAR LA LONGITUD VERDADERA DE UNA LINEA

Análisis: Si una línea es paralela a un plano de proyección, será proyectada sobre este plano en su verdadera longitud. Por tanto, si una línea, situada en el espacio, es girada alrededor de un eje hasta que sea paralela a un plano de proyección, aparecerá en su verdadera longitud.

Ejemplo: En la Fig. 7-3 la línea oblicua AB aparece en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Usando un eje vertical, que pase por A en la vista de planta, el punto B se debe girar hasta que la línea AB sea paralela al plano frontal. La línea aparecerá, entonces, en su verdadera longitud en la vista frontal. Observe que la rotación del punto B no altera su elevación. La pendiente verdadera de la línea también puede medirse en la vista frontal, puesto que la línea aparece en su verdadera longitud en esta vista de elevación.

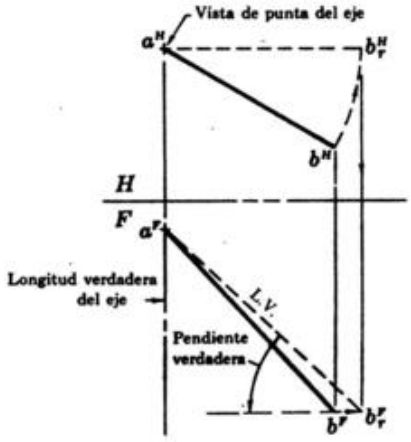


Fig. 7-3.
Longitud verdadera de una línea, hallada por revolución alrededor de un eje vertical

La Fig. 7-4 muestra la misma línea oblicua siendo girada alrededor de un eje horizontal. En (*a*) el eje pasa por uno de los extremos de la línea; en (*b*) el eje pasa por el punto medio de la línea.

En general, el eje puede pasar por cualquier punto de la línea. Por conveniencia, usualmente el eje se pasa por uno de los extremos de la línea. En este caso solamente se necesita girar un punto para mostrar la longitud verdadera de la línea, como se muestra en las Figs. 7-3 y 7-4(*a*).

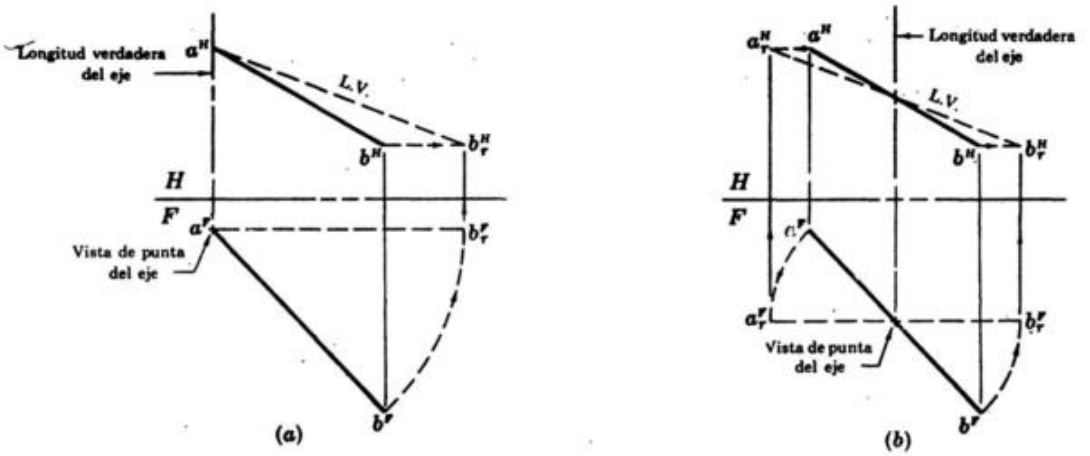


Fig. 7-4. Longitud verdadera de una línea, hallada por revolución alrededor de un eje horizontal

7.3 ENCONTRAR EL TAMAÑO VERDADERO DE UN PLANO

Análisis: Se deben satisfacer dos condiciones para girar un plano hasta que aparezca en su tamaño verdadero. Primero: se debe girar alrededor de un eje que pertenezca al plano. Segundo: el eje, alrededor del cual se gira el plano, debe ser paralelo al plano de imagen sobre el cual se va a proyectar el plano. Por tanto, si el plano se debe girar de modo que su tamaño verdadero aparezca en la vista de planta, el giro se debe hacer alrededor de un eje horizontal, situado en el plano. Después de determinar la localización del eje se girarán todos los puntos del plano hasta que el plano sea horizontal.

Ejemplo: En la Fig. 7-5 el plano *ABC* se gira hasta que sea paralelo al plano horizontal. Se traza un eje horizontal en la vista de elevación frontal, el cual aparecerá en su verdadera longitud en la vista de planta y se representará como un punto en la vista de elevación auxiliar 1. El plano se gira alrededor de la vista de punta del eje en la vista 1, hasta que sea paralelo al plano horizontal. Proyecte los puntos girados *B* y *C* a la vista de planta hasta que corten las proyecciones de los puntos *B* y *C*, paralelas a la línea de pliegue *H*-1. En la vista de planta una estos dos puntos girados, *B* y *C*, con el punto *A*, para determinar el tamaño verdadero del plano.

Obsérvese que el plano aparecerá como un filo en la vista que muestre el eje de punta. Esta vista de filo también mostrará la pendiente verdadera del plano, puesto que es una vista de elevación.

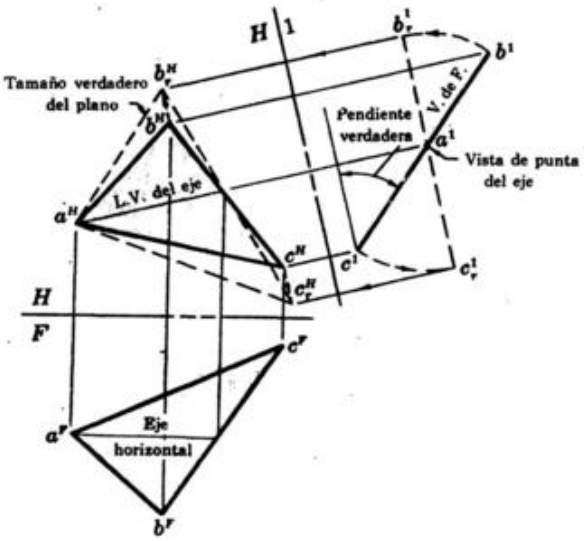


Fig. 7-5.
Tamaño verdadero de un plano, hallado por revolución alrededor de un eje horizontal

7.4 ENCONTRAR EL ANGULO DIEDRO

Análisis: Un plano cortante que sea perpendicular a la intersección de dos planos, determina el ángulo diedro entre los dos planos. Después de determinar la línea de intersección entre los dos planos, se pasa un plano cortante que forme ángulo recto con la línea de intersección, y de esta manera queda

determinada la intersección del plano cortante con los dos planos dados. El plano que contiene el ángulo formado por estas dos líneas que se cortan se gira hasta una posición que haga ver su tamaño verdadero.

Ejemplo: En la Fig. 7-6 se da la vista de planta y la vista de elevación frontal de los planos *ABC* y *BCD*. Se construye una vista de elevación auxiliar que muestre ambos planos, con la línea común de intersección, *BC*, apareciendo en su verdadera longitud. Se construye un plano cortante, *XY*, perpendicular a la línea *BC*, en un punto cualquiera, en este caso *E*. El plano cortante corta los dos planos dados en *F*, *E* y *G*. Proyecte estos puntos a la vista de planta. Estos puntos determinan el ángulo diedro, el cual debe ser girado ahora alrededor de un eje horizontal que pase por el punto *F*. El eje aparece como un punto en la vista 1. Gire los puntos *G* y *E* alrededor del eje horizontal que pasa por *F* hasta que estén situados sobre un plano paralelo al plano de imagen horizontal. El ángulo diedro, girado ahora hasta quedar sobre un plano horizontal, aparecerá en su amplitud verdadera en la vista de planta.

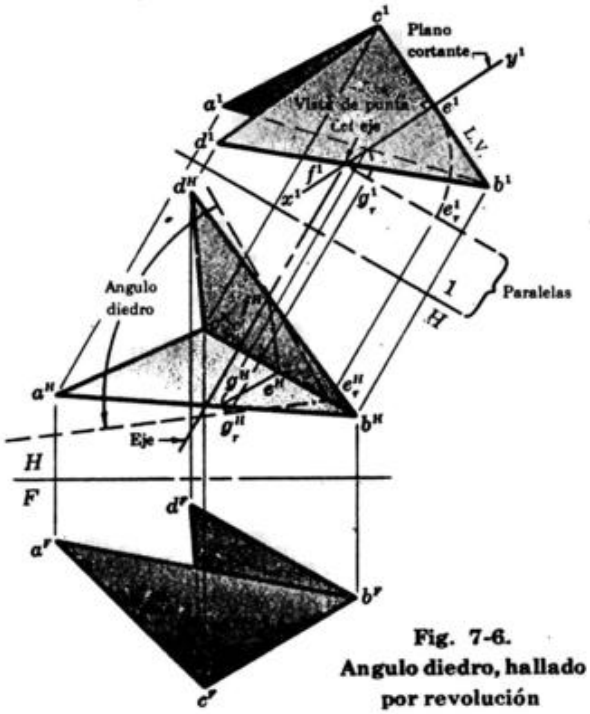


Fig. 7-6. Angulo diedro, hallado por revolución

7.5 ENCONTRAR EL ANGULO FORMADO ENTRE UNA LINEA Y UN PLANO

Análisis: Para determinar, por revolución, el ángulo formado entre una línea y un plano, la línea se debe girar alrededor de un eje perpendicular al plano. La revolución alrededor de cualquier otro eje no mostrará el ángulo pedido. Una vista que muestre el tamaño verdadero del plano, también mostrará el eje como un punto. Por tanto, el eje aparecerá en su verdadera longitud en una vista que muestre el plano como un filo y será perpendicular a esta vista de filo del plano. La línea se gira hasta que aparezca en su verdadera longitud, en la vista que muestra el plano como un filo. El ángulo verdadero entre la línea y el plano se mide en en esta vista.

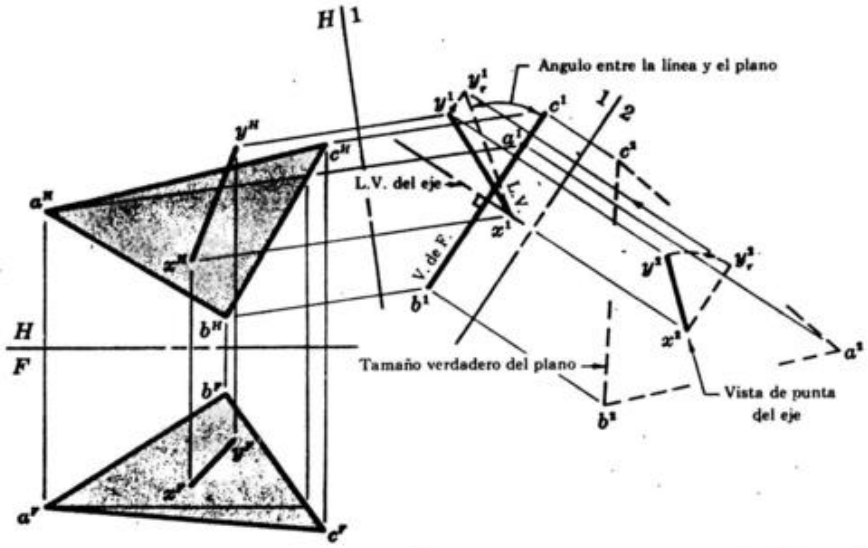


Fig. 7-7. Angulo entre una línea y un plano, hallado por revolución

Ejemplo: En la Fig. 7-7 se da el plano *ABC* y la línea *XY* en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Se dibuja una vista de elevación auxiliar 1 que muestre la línea *XY* y la vista de filo del plano *ABC*. Luego se construye la vista inclinada que muestra el tamaño verdadero del plano, pero mostrar el plano en su tamaño verdadero no será de ninguna utilidad, puesto que nos interesa únicamente mostrar la vista de punta del eje alrededor del cual girará la línea *XY*. La línea *XY* se gira hasta que aparezca en su verdadera longitud en la vista de elevación auxiliar 1, donde puede medirse el ángulo.

7.6 ENCONTRAR UNA LINEA QUE FORME ANGULOS DETERMINADOS CON DOS PLANOS PRINCIPALES

Análisis: Un cono circular recto tendrá todos sus elementos de igual longitud, los cuales harán el mismo ángulo con la base del cono. La intersección de dos conos que tengan elementos de igual longitud, un vértice común y sus ejes perpendiculares entre sí, determinará la línea pedida. Los dos conos deben intersectarse a lo largo de un elemento común, el cual hace los ángulos pedidos con dos planos principales, mutuamente perpendiculares.

Según la localización de las bases de los conos, hay ocho posibles soluciones al problema. Debido a que dos planos principales son perpendiculares el uno al otro, la suma de los dos ángulos dados no puede ser mayor de 90°. Si la suma de los dos ángulos dados es exactamente 90°, los dos conos serán tangentes.

Ejemplo: Se desea localizar una línea que haga un ángulo de 45° con el plano frontal y un ángulo de 30° con el plano horizontal (Ver la Fig. 7-8).

Determine una localización conveniente para el punto *X*, tanto en la vista de planta como en la vista de elevación frontal. Este punto será el vértice común de los dos conos circulares rectos, los cuales tienen igual altura inclinada. En la vista frontal construya el cono circular recto *XAC*, que tiene una altura inclinada determinada y hace un ángulo de 30° con el plano de la base horizontal, el cual es, por supuesto, paralelo al plano de proyección horizontal. Muestre este cono en la vista de planta. En la vista de planta construya el cono circular recto *XBD*, que tiene la misma altura inclinada que el cono *XAC* y hace un ángulo de 45° con el plano de la base vertical, el cual es paralelo al plano de proyección frontal. Muestre este cono en la vista frontal. La intersección de las posiciones giradas de los puntos *A* y *B* determinará la línea pedida que parte de *X*. Observe las diferentes posiciones que pueden tener los conos.

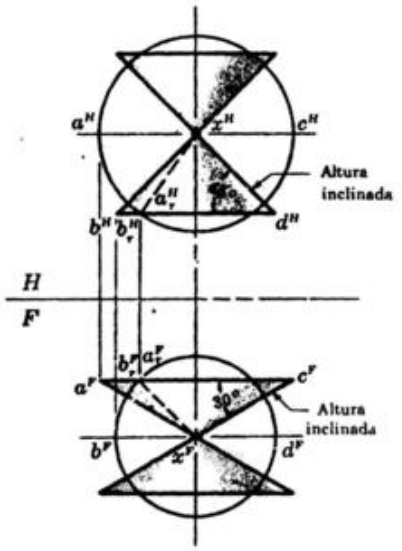


Fig. 7-8.
Localización de una línea que haga ángulos determinados con dos planos principales

Problemas resueltos

1. **Dado:** Tres vientos de alambre, *A*, *B* y *C*, son asegurados en un punto *O*, localizado 2′ por debajo del extremo superior de un poste *XY*. $A(2\frac{1}{2}, 3, 5\frac{1}{2})$, $B(3\frac{1}{2}, 2, 8)$, $C(6, 2\frac{1}{2}, 6)$, $X(4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 7)$, $Y(4\frac{1}{2}, 2, 7)$. Ver en el Art. 1.7 el sistema de coordenadas para la presentación de problemas. Remítase a la Fig. 7-9. Escala: $\frac{1}{8}'' = 1'—0''$

Problema: Determine la longitud verdadera de cada uno de los vientos, por el método de revolución. También determine el ángulo que cada viento hace con el poste.

Solución:

Utilizando los datos, dibuje los vientos y el poste en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. En la vista de planta, usando el poste como un eje vertical, rote los puntos *A*, *B* y *C* hasta que queden situados en un plano paralelo al plano frontal. Desde los puntos *A*, *B* y *C*, en la vista frontal, trace líneas de nivel hasta que se corten con las proyecciones de *A*, *B* y *C* giradas. Una cada uno de estos puntos de intersección con el punto *O*, en la vista frontal. Las longitudes verdaderas de todos los vientos y los ángulos que estos hacen con el poste se pueden medir en la vista de elevación frontal.

Resp. Viento *AO*: L.V. = 10′—9½″, ángulo = 68°
Viento *BO*: L.V. = 9′—10″, ángulo = 35°
Viento *CO*: L.V. = 9′—5″, ángulo = 50°

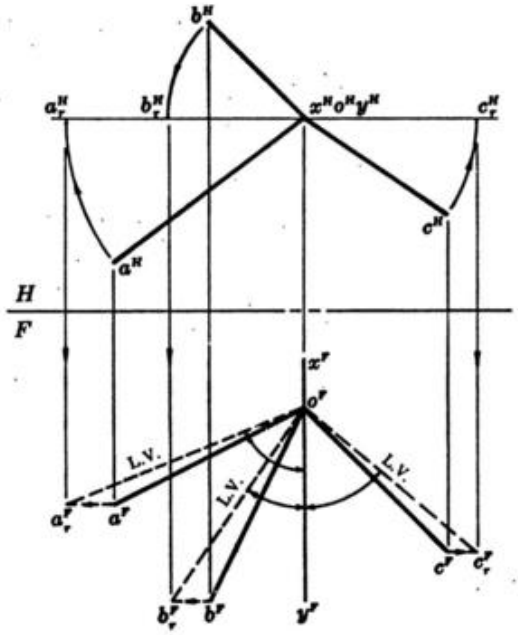


Fig. 7-9

2. Dado: El plano *ABCD*. El punto *B* está localizado 1″ al este, 1½″ al norte y ½″ por debajo de *A*. El punto *C* está localizado 3″ al este, 2″ al norte y 1½″ por debajo de *A*. El punto *D* está localizado 2″ exactamente al este y 1″ por debajo de *A*. Ver la Fig. 7-10. **Escala:** ½″ = 1″.

Problema: Utilizando el método de revolución, muestre el tamaño verdadero del plano en la vista de planta.

Solución:

Construya la vista de planta y la vista de elevación frontal del plano *ABCD*. Puesto que la vista frontal muestra el plano como un filo, se asume un eje de nivel que pase por el punto *A*, en la vista frontal, y luego se giran los puntos *B*, *C* y *D* hasta que queden situados en un plano horizontal. Desde los puntos *B*, *C* y *D*, en la vista de planta, se trazan líneas frontales hasta que corten las proyecciones de *B*, *C* y *D* giradas. Una los tres puntos de intersección para obtener el tamaño verdadero del plano, como se muestra.

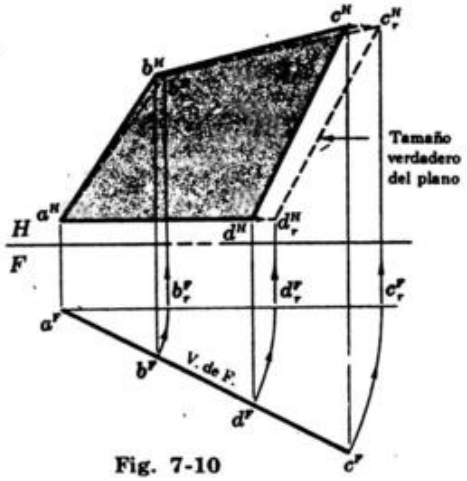


Fig. 7-10

3. Dado: El plano *ABC*. El punto *B* está localizado 5′ al este, 6′ al norte y 6′ por debajo de *A*. El punto *C* está localizado 10′ al este, 5′ al norte y 4′ por debajo de *A*. Ver la Fig. 7-11. **Escala:** ⅛″ = 1′—0″.

Problema: Determine la amplitud verdadera de cada uno de los ángulos del plano, usando el método de revolución.

Solución:

Usando los datos, construya la vista de planta y la vista de elevación frontal del plano *ABC*. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 para mostrar el plano como un filo. En la vista 1 asuma un eje de nivel que pase por el punto *A* y gire los puntos *B* y *C* hasta que queden situados en un plano horizontal. Proyecte los puntos *B* y *C* a la vista de planta, hasta que corten las proyecciones de *B* y *C*, paralelas a la línea de pliegue *H*-1. Estas intersecciones determinan las posiciones de los puntos *B* y *C* girados, mostrando, de este modo, el tamaño verdadero del plano. Todos los ángulos del plano se pueden medir en esta vista.

Resp. Angulo *A* = 28°, ángulo *B* = 97°, ángulo *C* = 55°

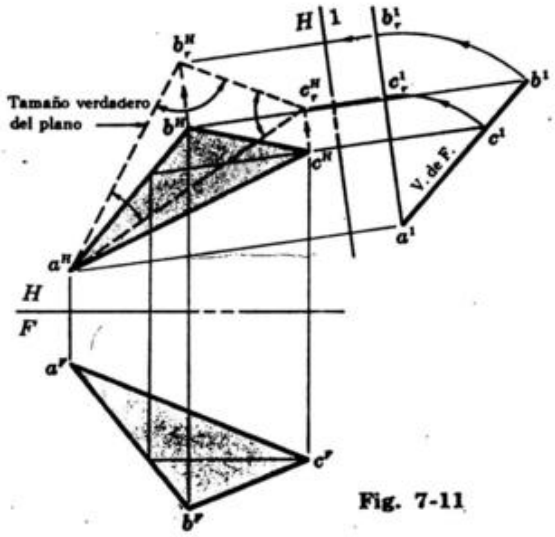


Fig. 7-11

4. Dado: El plano *ABC* está localizado así: El punto *B* está 5′ al este, 4′ al norte y 5′ por encima de *A*. El punto *C* está localizado 9′ al este, 4′ al sur y 2′ por encima de *A*. Ver la Fig. 7-12. Escala: $\frac{1}{8}'' = 1'—0''$.

Problema: Utilizando los métodos de revolución, determine el diámetro del mayor círculo que se puede dibujar dentro del plano *ABC*.

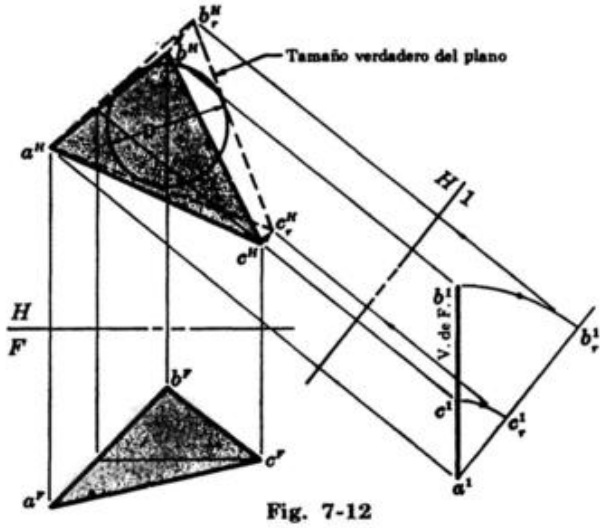


Fig. 7-12

Solución:

Utilizando los datos, construya la vista de planta y la vista de elevación frontal del plano *ABC*. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 para mostrar el plano como un filo. Asuma un eje de nivel que pase por *A*, en la vista 1, y gire los puntos *B* y *C* hasta que queden situados en un plano horizontal. A partir de los puntos *B* y *C*, en la vista de planta, trace líneas paralelas a la línea de pliegue *H*-1 hasta que corten las proyecciones de los puntos *B* y *C* girados, procedentes de la vista 1. Una estos dos puntos de intersección con el punto *A*, en la vista de planta. De esta manera queda establecido el tamaño verdadero del plano *ABC*. Los ángulos bisectrices determinarán el centro del mayor círculo que se puede inscribir en el plano *ABC*. Dibuje el círculo y mida su diámetro, utilizando la escala dada. *Resp.* Diámetro = 5′—2″

5. Dado: Dos líneas de agua que parten de los puntos *A* y *B*, convergen en el punto *C*, como se muestra en la Fig. 7-13. El punto *A* está 30′ al oeste, 30′ al norte y 30′ por encima de *C*. El punto *B* está localizado 20′ al este, 20′ al norte y 40′ por encima de *C*. Escala: 1″ = 30′.

Problema: Usando el método de revolución, determine la longitud verdadera de cada una de las líneas de agua y la amplitud verdadera del ángulo formado entre ellas.

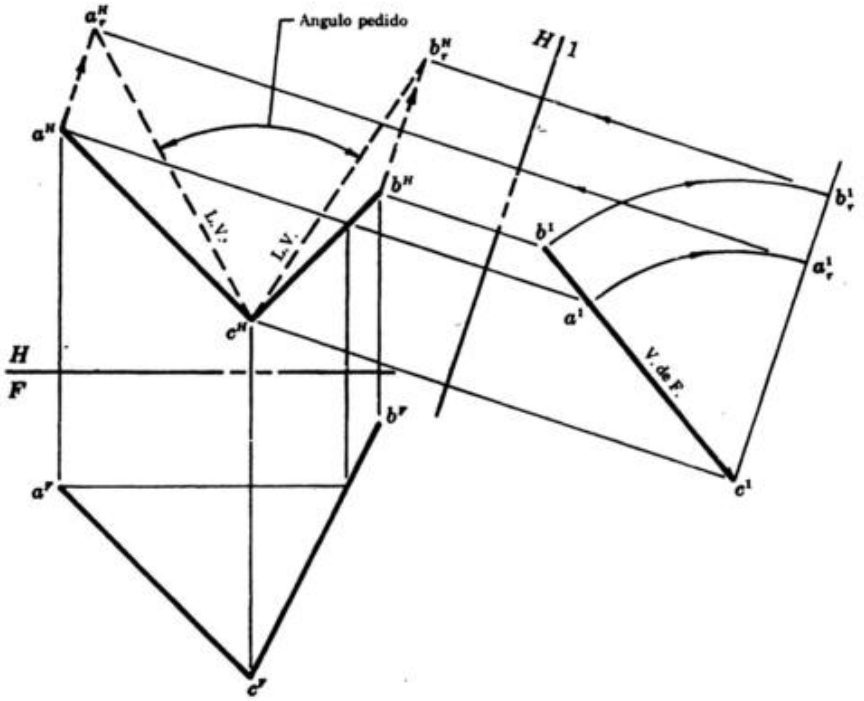


Fig. 7-13

Solución:

Utilizando los datos, dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal de las dos líneas de agua. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 para mostrar la vista de filo del plano *ABC*. En la vista 1 asuma un eje de nivel que pase por el punto *C* y gire los puntos *A* y *B* hasta que queden situados en un plano horizontal. A partir de los puntos *A* y *B*, en la vista de planta, trace líneas paralelas a la línea de pliegue *H*-1, hasta que corten las proyecciones de los puntos *A* y *B* girados, procedentes de la vista 1. Una estos dos puntos de intersección con el punto *A*, en la vista de planta, y mida el ángulo pedido. La vista de planta mostrará también las longitudes verdaderas de las dos líneas de agua.

Resp. L.V. de AC = 52′—0″, L.V. de BC = 49′—4″, ángulo ACB = 61°30′

6. **Dado:** Dos puntales de soporte se cortan en un punto común *C*, como se muestra en la Fig. 7-14. El punto *A* está localizado 6′ al oeste, 2′ al sur y a la misma elevación de *C*. El punto *B* está localizado 3′ al este, 4′ al sur y 3′ por encima de *C*. Escala: $\frac{3}{16}'' = 1'—0''$.
Problema: Usando los métodos de revolución, determine el ángulo formado por los dos puntales. Verifique su respuesta por otro método.

Solución:

Dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal de los dos puntales, *AC* y *BC*. Construya la vista de elevación auxiliar 1 para mostrar el plano *ABC* como un filo. En la vista 1 asuma un eje de nivel que pase por el punto *B* y gire los puntos *A* y *C* hasta que queden situados en un plano horizontal, paralelo a *H*-1. A partir de los puntos *A* y *C*, en la vista de planta, trace líneas paralelas a la línea de pliegue *H*-1, hasta que corten las proyecciones de los puntos *A* y *C* girados. Una las posiciones giradas de los puntos *A* y *C*, en la vista de planta. Asímismo, una el punto *B* con el punto *C* girado, en esa vista. El ángulo que se pide se puede medir ahora en la vista de planta.

La respuesta obtenida se puede verificar construyendo una vista inclinada 2, la cual mostrará el tamaño verdadero del plano *ABC*. El ángulo *C*, en esta vista, es el ángulo pedido. *Resp.* 105°30′

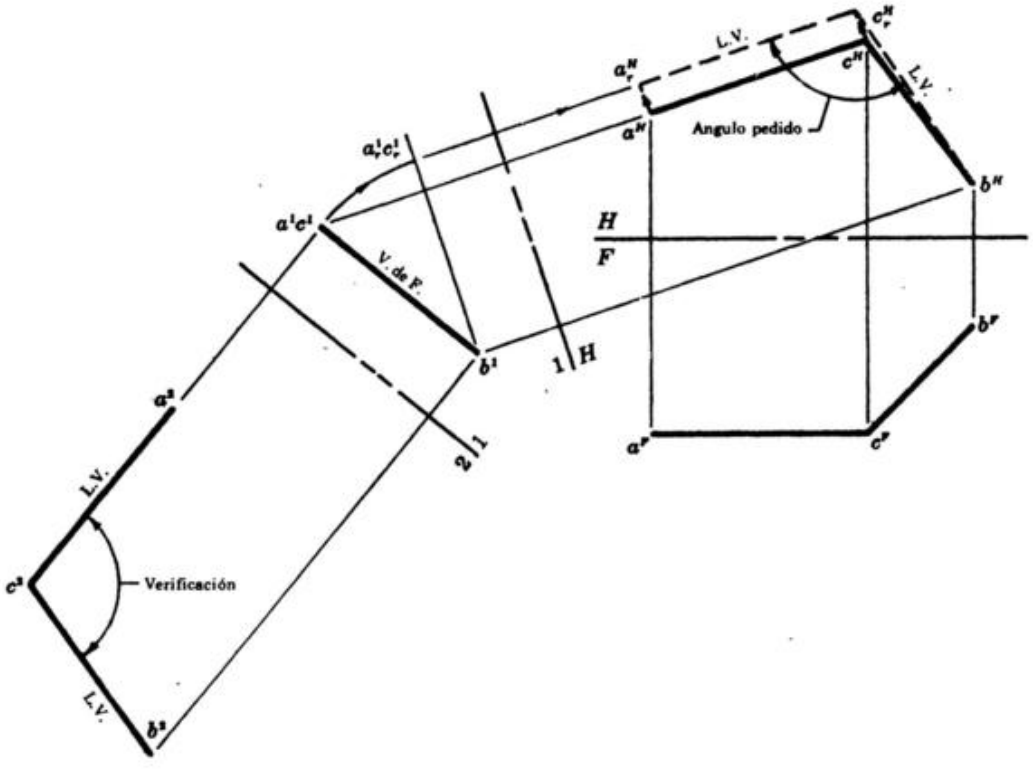


Fig. 7-14

7. Dado: Las líneas *AB* y *BC*, mostradas en la Fig. 7-15, representan dos puntales de soporte de una máquina de montaje. El punto *B* está 9″ al este, 1′ al norte y 9″ por debajo de *A*. El punto *C* está 1′—10″ exactamente al este y 7″ por encima de *A*. Escala: $\frac{3}{4}'' = 1'—0''$.

Problema: Utilizando el método de revolución, determine la longitud verdadera de cada uno de los puntales y la amplitud verdadera del ángulo entre ellos.

Solución:

Usando los datos, dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal de los dos puntales. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 que muestre el plano *ABC* como un filo. Asuma un eje de nivel que pase por el punto *A* y gire los puntos *B* y *C* hasta que queden situados en un plano horizontal. A partir de los puntos *B* y *C*, en la vista de planta, trace líneas paralelas a la línea de pliegue *H*-1 hasta que corten las proyecciones de los puntos *B* y *C*, girados. Una los puntos *B* y *C* girados así como también el punto *A* con el punto *B* girado, en la vista de planta. Esta vista mostrará la longitud verdadera de cada uno de los puntales, así como también la amplitud verdadera del ángulo entre ellos.

Resp. L.V. de $AB = 1'—5\frac{1}{2}''$,
L.V. de $BC = 2'—0''$, ángulo $ABC = 66°$

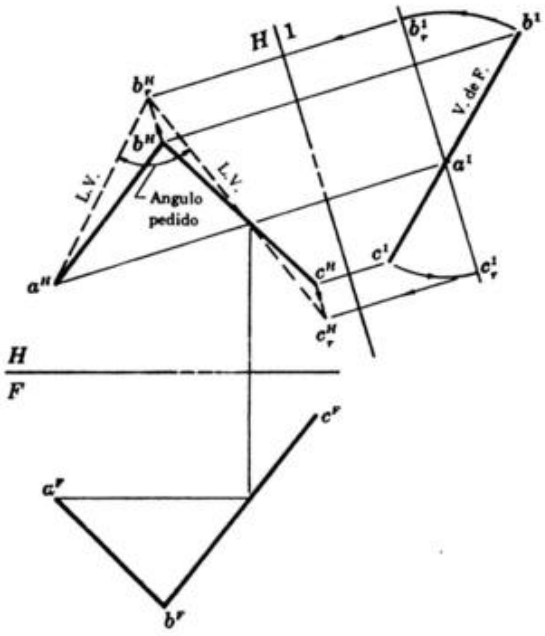


Fig. 7-15

8. Dado: El plano *ABC* mostrado en la Fig. 7-16. El punto *B* está 1′ al oeste, 3′ al norte y 4′ por debajo de *A*. El punto *C* está 7′ al este, 5′ al norte y 9′ por debajo de *A*. Escala: $\frac{3}{16}'' = 1'—0''$.

Problema: Gire el plano hasta que aparezca en su tamaño verdadero, tanto en la vista de planta, como en la vista de elevación frontal. Determine la longitud verdadera de las tres líneas que limitan el plano. Determine la amplitud verdadera de cada uno de los ángulos del plano. ¿Cuál es la pendiente del plano?

Solución:

Usando los datos, construya la vista de planta y la vista frontal del plano *ABC*. Dibuje una vista inclinada 1 para mostrar el plano como un filo. Asuma un eje que pase por el punto *B* y gire los puntos *A* y *C* hasta que queden situados en un plano paralelo al plano frontal. Desde los puntos *A* y *C*, en la vista de planta, trace líneas paralelas a la línea de pliegue *F*-1, hasta que corten las proyecciones procedentes de *A* y *C* girados. Una los puntos girados con el punto *B*, en la vista frontal, para obtener el tamaño verdadero del plano. Las amplitudes verdaderas de todos los ángulos del plano se pueden medir en esta vista. La vista frontal muestra también las longitudes verdaderas de *AB*, *AC* y *BC*.

Dibuje una vista de elevación auxiliar 2 para mostrar el plano como un filo. La pendiente del plano se mide en esta vista. En esta misma vista asuma un eje de nivel que pase por *A*, y gire los puntos *B* y *C* hasta que estén situados en un plano horizontal. Desde los puntos *B* y *C*, en la vista de planta, trace líneas paralelas a la línea de pliegue *H*-2 hasta que corten las proyecciones de *B* y *C* giradas. Una estos puntos de intersección con la vista de planta del punto *A*. El plano *ABC* se muestra nuevamente en su verdadero tamaño. Las longitudes verdaderas de las líneas *AB*, *BC* y *AC* se pueden medir ahora en la vista de planta. La amplitud verdadera de cada uno de los ángulos del plano puede ser encontrada también en esta vista. Si el problema se resuelve con exactitud, el tamaño del plano *ABC* girado será el mismo tanto en la vista de planta como en la vista de elevación frontal.

Resp. L.V. de $AB = 5'—1''$ Angulo $A = 46°$ Pendiente $= 56°$
L.V. de $AC = 12'—6''$ Angulo $B = 111°30'$
L.V. de $BC = 9'—7\frac{1}{2}''$ Angulo $C = 22°30'$

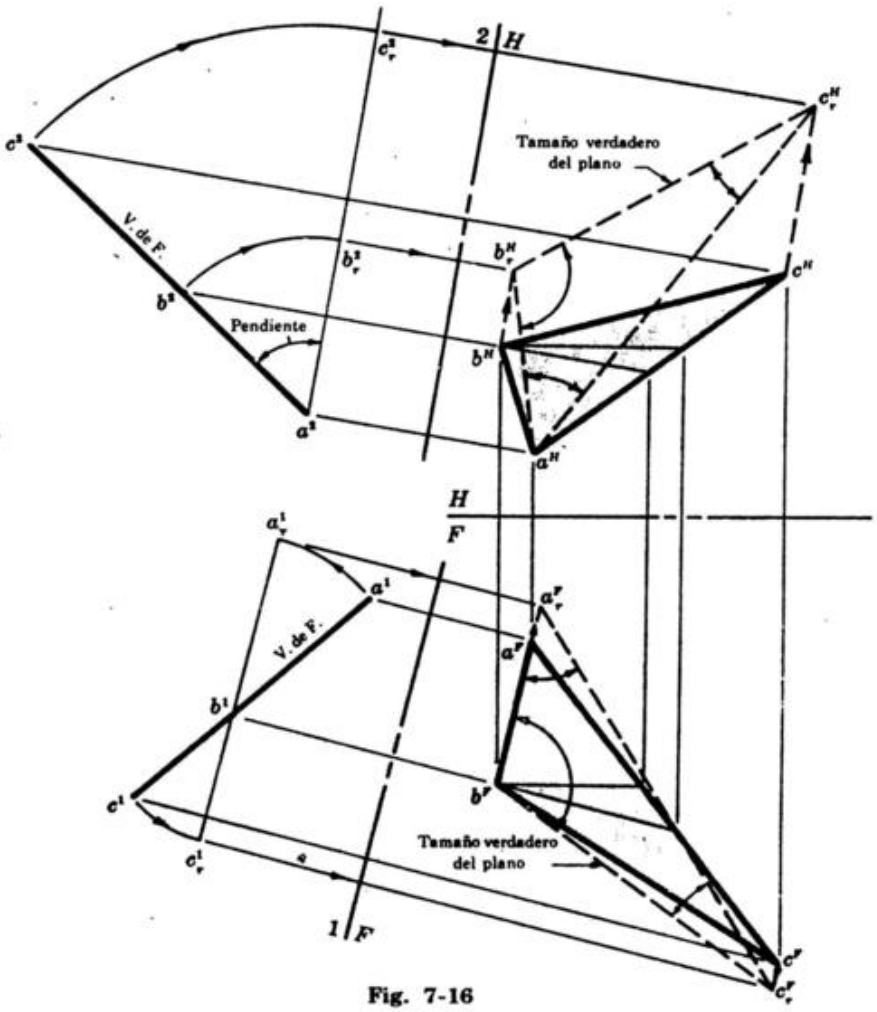


Fig. 7-16

9. Dado: La vista de planta y la vista de elevación frontal de una tolva de grano. Ver la Fig. 7-17. Escala: $\frac{1}{8}'' = 1'—0''$.

Problema: Determine el ángulo diedro entre los planos *ABCD* y *BDEF*.

Solución:

Construya una vista de elevación auxiliar 2 que muestre la línea de intersección *BD* en su verdadera longitud. Pase un plano cortante perpendicular a *BD* en un punto cualquiera, tal como *Y*. El ángulo diedro es el ángulo plano entre *YX* y *YZ*. Para obtener la amplitud verdadera del ángulo diedro, en la vista de planta, se debe girar el plano cortante alrededor de un eje de nivel, tal como *XZ*. En la vista de elevación 1 gire el punto *Y* hasta una posición de nivel y proyéctelo a la vista de planta para obtener la amplitud verdadera del ángulo diedro.

Resp. Angulo = 97°30′

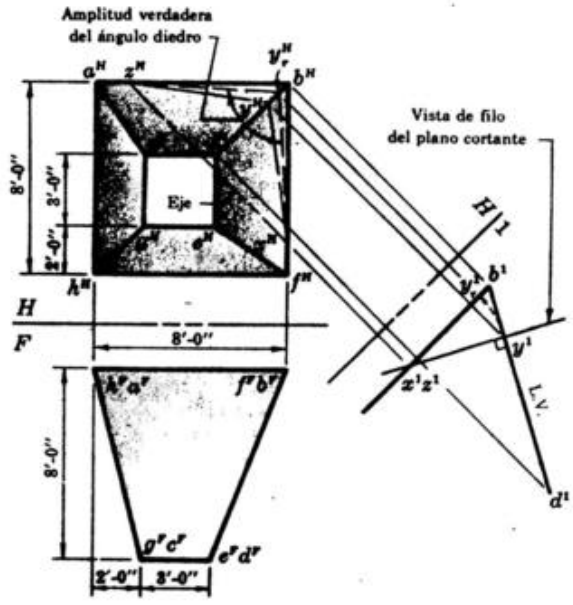


Fig. 7-17

10. Dado: El plano *ABC* y la línea *BX* en la Fig. 7-18. El punto *B* está 6′ al este, 10′ al norte y 4′ por debajo de *A*. El punto *C* está 17′ al este, 2′ al sur y 9′ por encima de *A*. El punto *X* está 20′ al este, 8′ al norte y 3′ por debajo de *A*. **Escala:** $\frac{1}{16}'' = 1'—0''$.
Problema: Utilizando el método de revolución, determine el ángulo entre la línea *BX* y el plano *ABC*. ¿Cuál es la amplitud verdadera del ángulo *ACB*?

Solución:

Utilice los datos para construir la vista de planta y la vista de elevación frontal del plano *ABC* y de la línea *BX*. Dibuje la vista de elevación auxiliar 1 para mostrar la línea *BX* y la vista de filo del plano *ABC*. Construya una vista inclinada 2 para mostrar la línea *BX* y el tamaño verdadero del plano *ABC*. En la vista 2 gire el punto *X* alrededor de un eje que pasa por *B* hasta que quede situado paralelo a la línea de pliegue 1-2. En la vista de elevación 1, trace una línea a partir del punto *X* paralela a la línea de pliegue 1-2, hasta que corte la proyección del punto *X* girado. Por este punto de intersección, trace una línea hasta el punto *B*. El ángulo entre la línea y el plano puede medirse ahora en la vista 1. El ángulo del plano, *ACB*, se mide en la vista 2.

Resp. Angulo = 20°30′
Angulo *ACB* = 36°

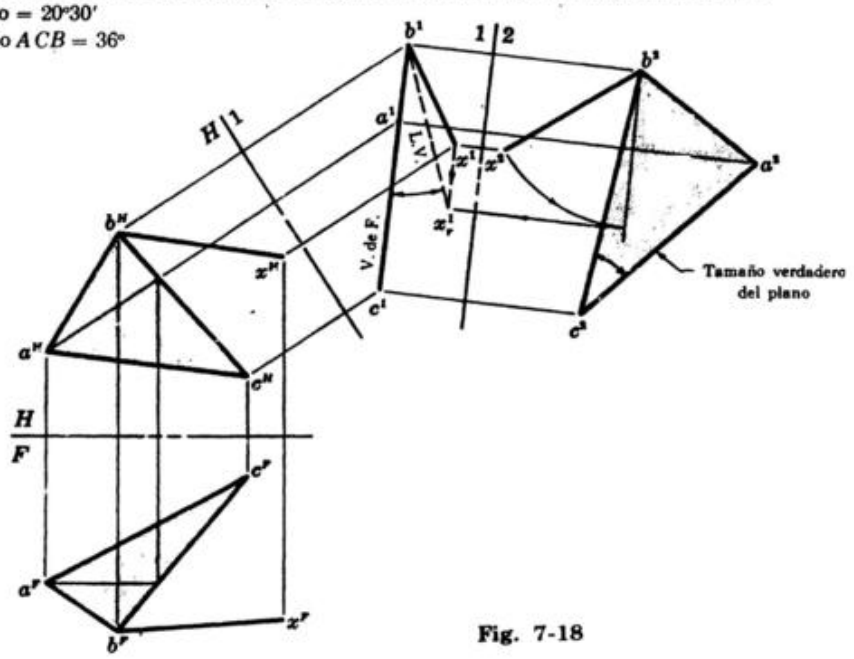


Fig. 7-18

11. Dado: La línea *AB*. El punto *B* está 8′ al este, 4′ al norte y 7′ por debajo de *A*. Ver la Fig. 7-19. **Escala:** $\frac{1}{8}'' = 1'—0''$.
Problema: Determine las amplitudes verdaderas de los ángulos que la línea *AB* hace con los planos horizontal, frontal y de perfil. Utilice el método de revolución.

Solución:

Dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal de la línea *AB*. Asuma un eje vertical que pase por el punto *B*, en la vista de planta, y gire el punto *A* hasta situarlo en un plano paralelo al frontal. Mida la pendiente (o ángulo *H*) en la vista frontal. Asuma un eje horizontal que pase por el punto *A*, en la vista frontal, y gire el punto *B* hasta situarlo en un plano paralelo al plano horizontal.

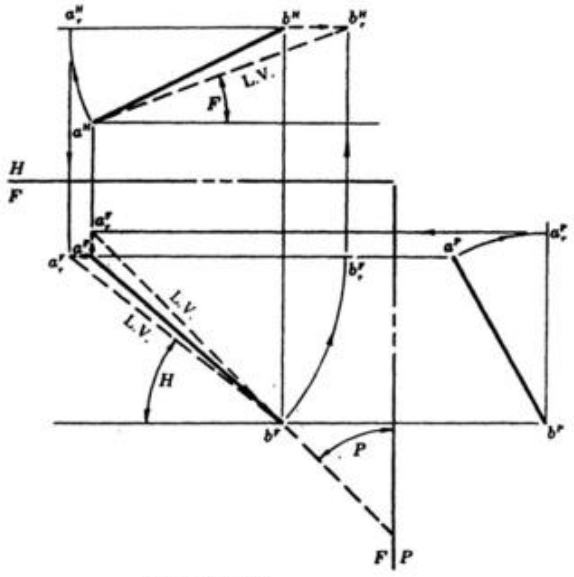


Fig. 7-19

El ángulo que la línea AB hace con el plano frontal se mide en la vista de planta. Construya una vista de perfil de la línea AB. Asuma un eje horizontal que pase por el punto B, en la vista de perfil, y gire el punto A hasta situarlo en un plano paralelo al plano frontal. El ángulo que la línea AB hace con el plano de perfil se mide en la vista frontal. *Resp.* $H = 38°$, $F = 20°30'$, $P = 45°$

12. Dado: La Fig. 7-20 muestra el asta de una bandera, XY, soportada por tres vientos de alambre, XA, XB y XC. Escala: $\frac{1}{16}'' = 1'—0''$.
Problema: Determine, por revolución, la longitud verdadera de cada uno de los vientos y el ángulo que cada uno hace con la superficie a la cual está sujeto.

Solución:

Dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal del asta, los vientos y las tres superficies mutuamente perpendiculares. Construya una vista de perfil del alambre XA. Asuma un eje de nivel que pase por el punto X, en esta vista, y gire el punto A hasta situarlo en un plano horizontal. Proyecte la posición girada de A a la vista de planta y únala al punto X, en esta vista. La longitud verdadera del viento y el ángulo que hace con la pared lateral se pueden medir en esta vista.

En la vista frontal asuma un eje de nivel que pase por el punto X, y gire el punto B hasta situarlo en un plano horizontal. Proyecte la posición girada de B a la vista de planta y únala con el punto X en esta vista. La longitud verdadera de XB y el ángulo que hace con la pared posterior se pueden medir en esta vista.

En la vista de planta asuma un eje vertical, el cual coincide con el asta, y gire el punto C hasta situarlo en un plano paralelo al plano frontal. Proyecte la posición girada de C a la vista frontal y únala con el punto X, en esta vista. La longitud verdadera de XC y su pendiente se pueden medir en la vista frontal.

Resp.	Viento	L.V.	Angulo
	XA	19′—0″	32°
	XB	13′—10″	46°30′
	XC	22′—10″	61°30′

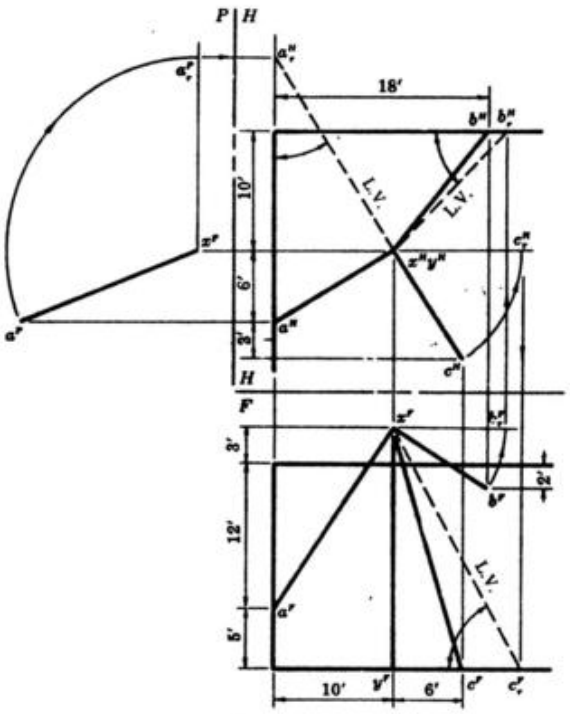


Fig. 7-20

13. Dado: El plano ABC y la línea XY en la Fig. 7-21. El punto B está 7′ exactamente al este y 1′ por encima de A. El punto C está 4′ al este, 8′ al sur y 6′ por encima de A. El punto X está 9′ al este, 1′ al sur y 5′ por encima de A. El punto Y está 4′ al este, 6′ al sur y 4′ por encima de A. Escala: $\frac{1}{8}'' = 1'—0''$.
Problema: Usando el método de revolución, determine: (*a*) la amplitud verdadera del ángulo entre la línea XY y el plano ABC, (*b*) el ángulo BAC y (*c*) la longitud verdadera de XY.

Solución:

Utilizando los datos, construya la vista de planta y la vista de elevación frontal de la línea y del plano. Dibuje una vista inclinada 1 para mostrar la línea XY y la vista de filo del plano ABC. Construya una vista inclinada 2 que muestre la línea XY y el tamaño verdadero del plano ABC. En la vista 2 gire el punto X alrededor del eje que pasa por Y, hasta que X quede situado sobre un plano paralelo a la línea de pliegue 1-2. Desde el punto X, en la vista 1, trace una línea paralela a la línea de pliegue 1-2, hasta que corte la proyección del punto X girado. Una el punto X, girado, con el punto Y, en la vista 1. Esta línea es la longitud verdadera de XY. Mida el ángulo entre la longitud verdadera de XY y la vista de filo del plano. El ángulo BAC se debe medir en la vista 2.

Resp. (*a*) Angulo = 25°,
(*b*) Angulo BAC = 63°,
(*c*) L.V. de XY = 7′—$2\frac{1}{2}$″

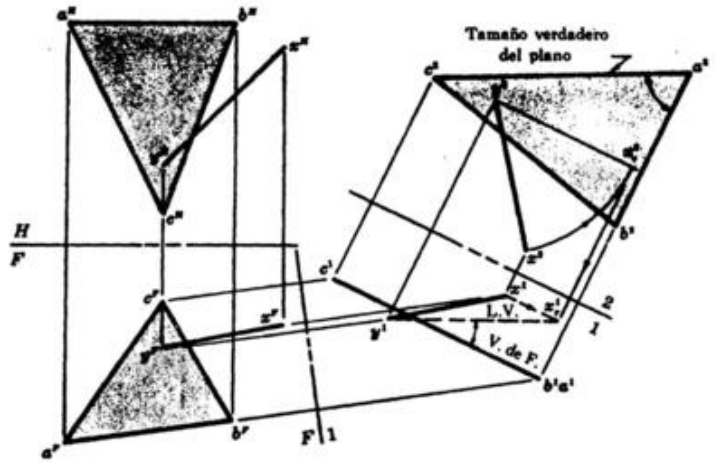


Fig. 7-21

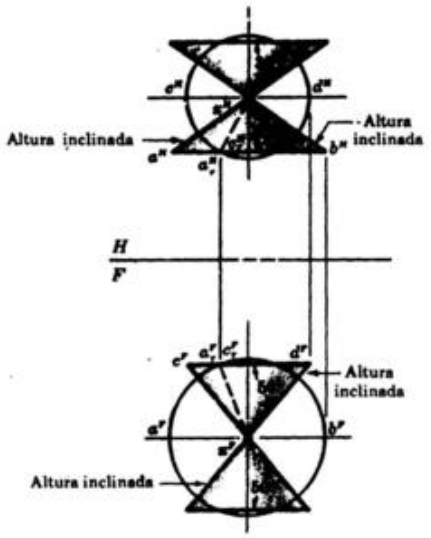


Fig. 7-22

14. Dado: La vista de planta y la vista de elevación frontal del vértice común, punto X, de dos conos que se cortan y su altura inclinada de 1". Ver la Fig. 7-22. Escala: $\frac{1}{2}'' = 1''$. **Problema:** Localice una línea que pase por el punto X y haga un ángulo de 35° con el plano frontal y un ángulo de 50° con el plano horizontal.

Solución:

Localice el punto X en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Este punto será el vértice común de los dos conos circulares rectos, que tienen una altura inclinada de 1". En la vista de planta construya el cono circular recto XAB, que tiene una altura inclinada de 1" y hace un ángulo de 35° con el plano de base vertical, el cual es paralelo al plano frontal. Muestre este cono en la vista frontal. En la vista de elevación frontal construya el cono circular recto XCD que tiene una altura inclinada de 1" y hace un ángulo de 50° con el plano de base horizontal. Muestre este cono en la vista de planta. La intersección de las posiciones giradas de los puntos A y C determinarán la línea que hace un ángulo de 35° con el plano frontal y un ángulo de 50° con el plano horizontal. La Fig. 7-22 muestra otras posiciones que podrían tomar los conos.

Problemas propuestos

En los siguientes problemas determine, por revolución, la longitud verdadera y la pendiente de la línea AB. Ver en el Art. 1.7 el sistema de coordenadas para la presentación de problemas.

				L.V.	Pendiente
15.	$A(1, 1, 5\frac{1}{2})$, $B(3, 3, 4\frac{1}{2})$,	Escala: 1" = 1'—0"	*Resp.*	3'—0"	41°30'
16.	$A(2, 4, 6)$, $B(4, 1, 5)$	Escala: $\frac{1}{4}'' = 1'$—0"	*Resp.*	15'—0"	53°
17.	$A(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 5)$, $B(3\frac{1}{2}, 4, 6)$	Escala: 1' = 20"	*Resp.*	53'—9"	34°
18.	$A(2\frac{1}{2}, 1, 4\frac{1}{2})$, $B(5, 1, 5\frac{1}{2})$	Escala: $\frac{1}{2}'' = 1'$—0"	*Resp.*	5'—$4\frac{1}{2}$"	0°
19.	$A(\frac{1}{2}, 4, 6\frac{1}{2})$, $B(4\frac{1}{2}, 2, 5\frac{1}{4})$	Escala: 1" = 10'	*Resp.*	46'—6"	25°30'

20. Una antena de radio de onda corta, AB, se soporta por medio de tres vientos de alambre, localizados así: $A(5, 5, 7\frac{1}{2})$, $B(5, 0, 7\frac{1}{2})$, $C(5, 1, 5)$, $D(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, 8)$, $E(7, 1\frac{1}{2}, 9)$. Escala: $\frac{1}{4}'' = 1'—0''$. Determine la longitud verdadera de cada uno de los vientos, usando el método de revolución.

Resp. L.V. de AC = 18'—11", L.V. de AD = 18'—0", L.V. de AE = 17'—3"

21. El asta de una bandera, AB, tiene 12' de altura. Ver la Fig. 7-23. Su estabilidad se mantiene con tres vientos de alambre, localizados así: El punto C está 8' al sur y 7' al este de AB y 2' más alto que B. El punto D está 4' al sur y 9' al oeste de AB y está asegurado en un punto situado 3' por encima de B. El punto E está 8' al norte, 2' al este y a la misma elevación de B. Escala: $\frac{3}{16}'' = 1'—0''$. Por medio del método de revolución, determine la longitud verdadera y la pendiente de cada uno de los vientos.

Resp. L.V. de AC = 14'—6" Pendiente de AC = 43°
L.V. de AD = 13'—4" Pendiente de AD = 42°
L.V. de AE = 14'—6" Pendiente de AE = 56°

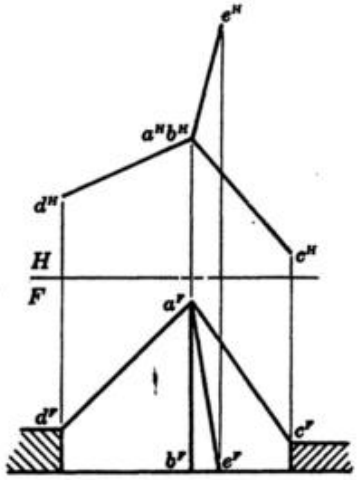


Fig. 7-23

22. Una antena de radio de onda corta, XY, tiene una altura de 15'. En el extremo superior de la antena se han asegurado tres vientos de alambre. Ver la Fig. 7-24. El punto Y, situado en la tierra, tiene una elevación de 137'. El punto A está 13' al oeste y 3'—6" al norte de X y tiene una elevación de 141'—6". El punto B está 5'—6" al este y 9'—6" al sur de X y a una elevación de 139'—6". El punto C está 12'—6" al este y 10' al norte de X y tiene la misma elevación que B. Escala: $\frac{1}{8}'' = 1'—0''$. Determine por el método de revolución, la longitud verdadera y la pendiente de cada uno de los vientos.

Resp. L.V. de AX = 17'—0" Pendiente de AX = 38°
L.V. de BX = 16'—8" Pendiente de BX = 48°30'
L.V. de CX = 20'—4" Pendiente de CX = 38°

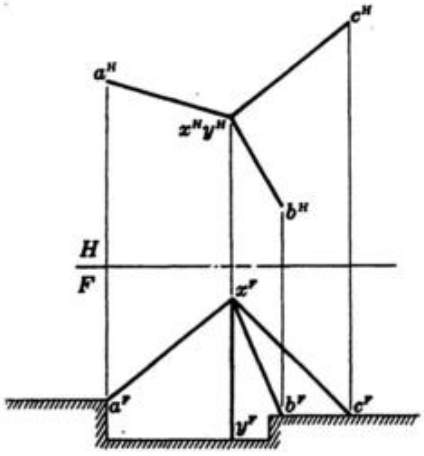


Fig. 7-24

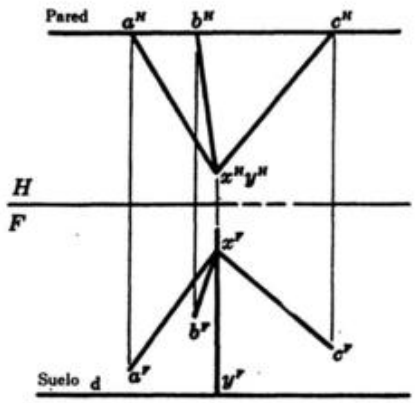


Fig. 7-25

23. El asta de una bandera se sostiene rígidamente por medio de tres tubos asegurados a una pared vertical, como se muestra en la Fig. 7-25. El punto B está 5'—6" al este y 4'—6" por encima de A. El punto C está 17' al este y 2' por encima de A. El punto X está 7'—6" al este y 10' por encima de A y está localizado a 12' de la pared. El punto Y está 7'—6" al este, 12' al sur y 2' por debajo de A. Escala: $\frac{1}{8}'' = 1'—0''$. Por medio del método de revolución determine la longitud verdadera de cada tubo.

Resp. L.V. de AX = 17'—4", L.V. de BX = 13'—4", L.V. de CX = 17'—4"

24. Utilizando los mismos datos y la misma escala del problema 23, determine, por el método de revolución, el ángulo que cada tubo hace con la pared vertical.

Resp. Angulo A = 44°, ángulo B = 64°, ángulo C = 44°

25. Por el método de revolución, determine la amplitud verdadera de cada uno de los ángulos del plano ABC. $A(1, 1\frac{1}{2}, 8)$, $B(4, 4, 8\frac{1}{2})$, $C(4, 2, 6)$.

Resp. Angulo $A = 50°$, ángulo $B = 60°$, ángulo $C = 70°$

26. La línea AB y el punto X están localizados así: $A(4, 1\frac{1}{4}, 8)$, $B(6, 4\frac{1}{2}, 6)$, $X(5\frac{1}{4}, 5, 7\frac{1}{2})$. Escala: $\frac{1}{4}'' = 1'—0''$. Cuando el punto X gira alrededor del eje AB, ¿cuál es el diámetro de la trayectoria circular descrita por el punto?

Resp. 12'—10''

27. Dos líneas de alcantarillado que parten de A y B convergen en una boca de inspección, C. El punto B está localizado 10' al este, 20' al sur y 10' por debajo de A. El punto C está 25' al oeste, 25' al sur y 25' por debajo de A. Escala: $1'' = 20'$. Usando el método de revolución, determine el ángulo entre las dos líneas de alcantarillado.

Resp. Angulo = 34°30'

28. El eje de un árbol está representado por la línea AB en la Fig. 7-26. El punto X es el extremo de un brazo de palanca, perpendicular al eje. El punto B está 8' al este, 3' al sur y 6' por encima de A. El punto X está 3' exactamente al este de A y a la misma elevación que B. Escala: $\frac{1}{4}'' = 1'—0''$. Si el punto A está sobre el piso, ¿qué espacio libre (si lo hay) existe entre el brazo de la palanca y el piso? ¿Qué longitud tiene el brazo de la palanca? Si existe espacio libre, ¿qué longitud máxima puede tener la palanca, para alcanzar a tocar el piso?

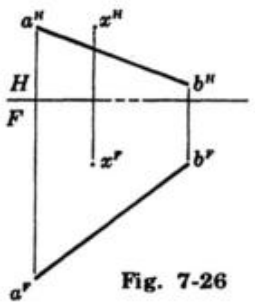


Fig. 7-26

Resp. Espacio libre = 6''
Longitud de la palanca = $3'—4\frac{1}{2}''$
Longitud máxima = $4'—1\frac{1}{2}''$

29. La Fig. 7-27 muestra la armadura estructural situada entre dos edificios adyacentes. Escala: $\frac{1}{4}'' = 1'—0''$. Por medio de la revolución, determine la longitud verdadera de los miembros estructurales AB y CD.

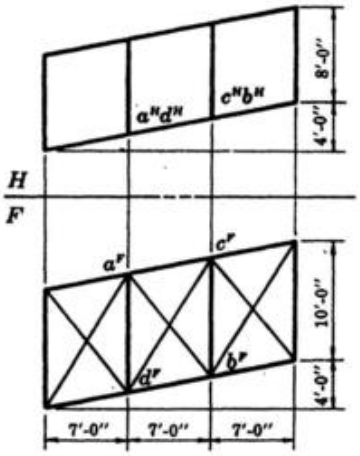


Fig. 7-27

Resp. L.V. de AB = 11'—3'', L.V. de CD = 13'—3''

30. Dos cañerías AB y CB convergen en un punto B. El punto A está 35' al norte, 10' al este y 30' por encima de B. El punto C está localizado 20' al norte, 60' al oeste y 15' por encima de B. Una nueva cañería DB debe estar localizada en el plano de ABC uniendo el punto B con el punto D, el cual está localizado 30' exactamente al oeste de A. Escala: $1'' = 20'$. Por medio de la revolución determine la longitud verdadera de cada una de las cañerías.

Resp. L.V. de AB = 47'—0'', L.V. de CB = 64'—6'', L.V. de DB = 49'—0''

31. El plano ABC y el punto X. El punto B está 2' al este, 2' al norte y 2' por debajo de A. El punto C está 3'—6'' al este, 9'' al norte y 9'' por encima de A. El punto X está 2' al este y 1' al norte de A. Escala: $1'' = 1'—0''$. Utilizando el método de revolución muestre un agujero de 9'' de diámetro situado sobre el plano, que tenga como centro el punto X. ¿A qué distancia del círculo quedará el borde más cercano del plano?

Resp. $5\frac{3}{4}''$

32. Los planos ABC y BCD se muestran en la Fig. 7-28. El punto B está localizado 11' al este, 6'' al norte y 1'—6'' por debajo de A. El punto C está 3' al este, 5'—6'' al sur y 3' por encima de A. El punto D está 6'—6'' al este, 3'—6'' al norte y 8' por encima de A. Escala: $\frac{1}{4}'' = 1'—0''$. Determine por el método de revolución la amplitud verdadera del ángulo diedro.

Resp. 78°30'

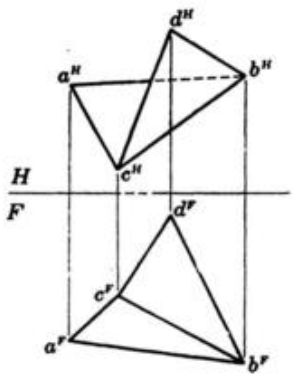


Fig. 7-28

33. ABC y ABD son dos planos que se cortan a lo largo de la línea AB. El punto B está 4' al este, 8' al sur y 8' por debajo de A. El punto C está 11' al este, 2' al norte y 10' por debajo de A. El punto D está localizado 7' exactamente al norte y 11' por debajo de A. Escala: $\frac{1}{8}'' = 1'—0''$. Utilizando el método de revolución determine el ángulo diedro entre los dos planos.

Resp. Angulo diedro = 50°

34. La Fig. 7-29 muestra la vista de planta y la vista de elevación frontal de un machón de concreto de un puente. Escala: $\frac{3}{16}'' = 1'—0''$. Por medio de revolución, determine la amplitud verdadera del ángulo diedro entre: (*a*) los planos *B* y *C*, (*b*) los planos *A* y *B*.

Resp. (*a*) Angulo = 95°
(*b*) Angulo = 100°

35. La Fig. 7-30 muestra dos planos que se cortan, *A* y *B*. Escala: $\frac{1}{4}'' = 1'—0''$. Por medio de revolución determine el ángulo diedro entre los dos planos.

Resp. Angulo = 99°

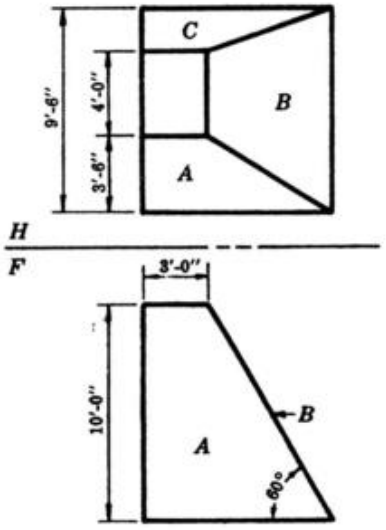


Fig. 7-29

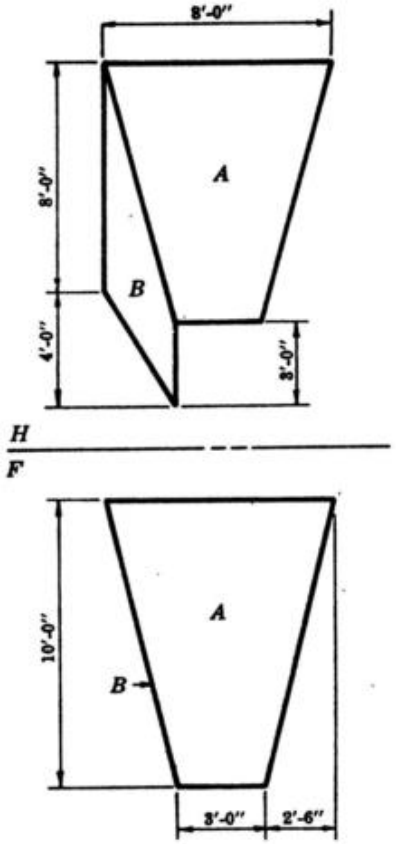


Fig. 7-30

En cada uno de los siguientes problemas determine por el método de revolución la amplitud verdadera del ángulo entre la línea *XY* y el plano *ABC*.

Ver en el Art. 1.7 la presentación de problemas por medio de coordenadas.

36. $X(1, 2, 5)$, $Y(3, 2, 5\frac{1}{4})$, $A(1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$, $B(2, 3, 5\frac{1}{4})$, $C(4, 2, 5)$ *Resp.* 26°30'

37. $X(1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4\frac{1}{4})$, $Y(3, 2, 4\frac{1}{2})$, $A(1, 1\frac{1}{2}, 5)$, $B(2, 2\frac{1}{2}, 4)$, $C(3\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$ *Resp.* 38°30'

38. $X(1, 2, 5)$, $Y(3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, 4)$, $A(1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 5)$, $B(2, 3\frac{1}{4}, 4\frac{1}{2})$, $C(3\frac{1}{2}, 1, 6)$ *Resp.* 37°30'

39. $X(1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 5\frac{1}{4})$, $Y(3, 3\frac{1}{4}, 6\frac{1}{2})$, $A(1, 3\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$, $B(2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{4})$, $C(3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{4}, 6\frac{1}{4})$ *Resp.* 43°

40. $X(2, 2\frac{1}{4}, 4\frac{1}{2})$, $Y(1\frac{1}{2}, 3, 6)$, $A(\frac{1}{4}, 3\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$, $B(1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 7)$. $C(1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$ *Resp.* 22°30'

41. El plano *ABC* y la línea *XY* están localizados así: $A(5\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4}, 6\frac{1}{4})$, $B(6, \frac{1}{2}, 5\frac{1}{4})$, $C(6\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4})$, $X(5\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, 7)$, $Y(6, 2\frac{1}{4}, 5\frac{1}{2})$. Por medio de la revolución determine la amplitud verdadera del ángulo entre la línea *XY* y el plano *ABC*.

Resp. Angulo = 76°

42. La línea *AB* está localizada así: El punto *B* está 2' al este, 1' al sur y 1'—6" por encima de *A*. Escala: 1" = 1'—0". Determine por medio de la revolución la longitud verdadera de la línea y los ángulos que hace con los planos *H*, *F* y *P*.

Resp. L.V. de *AB* = $2'—8\frac{3}{8}''$
Angulo *H* = 34°
Angulo *F* = 22°
Angulo *P* = 48°

43. Un tubo *XY* y una pared *ABCD* están localizados así: $X(1\frac{1}{2}, 5, 7\frac{1}{2})$, $Y(3, 5\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2})$, $A(2, 6, 7)$, $B(3, 4\frac{1}{2}, 8)$, $C(4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2})$, $D(3\frac{1}{2}, 6, 6\frac{1}{2})$. Por medio de la revolución determine el ángulo entre el tubo y el plano de la pared.

Resp. Angulo = 26°

44. La Fig. 7-31 muestra un tetraedro. Escala: 12" = 1'—0". Por medio de la revolución determine el ángulo que la línea *BC* hace con el plano *ABD*.
Resp. Angulo = 51°

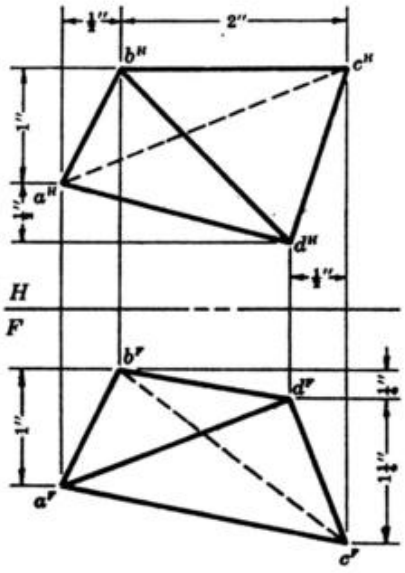


Fig. 7-31

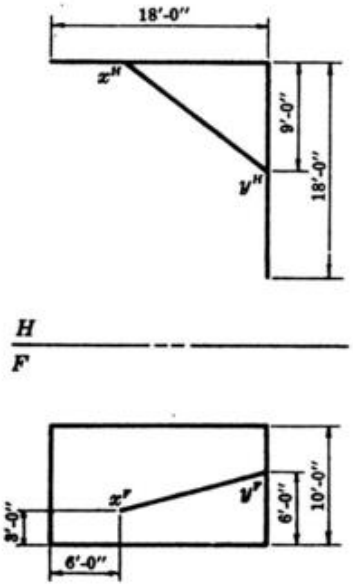


Fig. 7-32

45. Un tubo XY corta dos paredes verticales. Ver la Fig. 7-32. Escala: $\frac{1}{8}$" = 1'—0". Por medio de la revolución determine el ángulo que el tubo hace con la pared: (*a*) en el punto X, (*b*) en el punto Y.
Resp. (*a*) Angulo = 36° (*b*) Angulo = 51°30'.

Capítulo 8

Intersección y desarrollo

Muchos textos de geometría descriptiva dedican gran cantidad de tiempo y material al estudio de la intersección y desarrollo de superficies. Como se mencionó en el prólogo de este libro, debido al tiempo tan reducido que se ha asignado a los cursos básicos de dibujo de ingeniería y geometría descriptiva, se ha hecho necesario condensar el material que se presenta en estos cursos. Por tanto, este capítulo, dedicado a la intersección y desarrollo de superficies, presenta únicamente los temas fundamentales de estudio que, según confía el autor, serán suficientes para satisfacer las necesidades de la mayoría de los estudiantes de ingeniería y de ciencias. No se pretende hacer un estudio extenso de cada uno de los tipos de intersección de superficies. Si el estudiante logra comprender los fundamentos expuestos en este capítulo, tendrá poca o ninguna dificultad para comprender los problemas más complicados, derivados de estos conceptos básicos sobre la intersección y desarrollo de superficies.

En los capítulos anteriores hemos expuesto diferentes métodos utilizados para determinar la intersección de líneas, planos y combinaciones de líneas y planos. Sin embargo, el estudio de la intersección de líneas y planos se extiende hacia un dominio más práctico cuando el estudiante puede ver la aplicación de los métodos mencionados. El propósito de este capítulo es analizar los tipos más comunes de intersecciones de superficies que tienen mayor probabilidad de ser útiles al ingeniero. Los ejemplos se han escogido de forma tal, que los principios fundamentales concernientes a la intersección de superficies se pueden utilizar fácilmente, sin necesidad de complicados pasos de procedimiento. Los problemas de este capítulo son fundamentales y exigen un cuidadoso análisis por parte del estudiante.

En el capítulo 4 hemos mostrado que una línea corta a un plano en un punto que es común tanto a la línea como al plano. También se mostró que la intersección de dos planos no paralelos es una línea recta, común a ambos planos. El autor sugiere al estudiante repasar los artículos 4.1 y 4.2 para que refresque su memoria, recordando los conceptos básicos relativos a líneas y planos que se cortan.

8.1 DEFINICIONES

(*1*) *Generatriz* — una línea recta, cuyo movimiento continuo genera, o forma, una superficie.

(*2*) *Directriz* — una línea recta o curva que está continuamente en contacto con la generatriz.

(*3*) *Director* — una superficie, a la cual la generatriz es constantemente paralela.

(*4*) *Elemento* — una línea recta perteneciente a la superficie, que indica una posición específica de la generatriz.

(*5*) *Eje* — una línea media, alrededor de la cual gira la generatriz.

(*6*) *Desarrollo* — desdoblamiento de una superficie sobre un plano. Las Figs. 8-1(*a*) y 8-1(*b*) muestran el desarrollo de un cilindro y un cono, respectivamente. Una superficie de desarrollo muestra todas las líneas en su verdadera longitud y todos los ángulos en su

verdadera amplitud. Generalmente se supone que la superficie es cortada por su menor elemento, para facilitar su construcción. En los problemas siguientes no se muestra la superficie adicional que se necesita para la "costura"

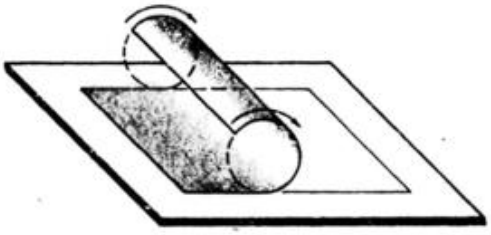


Fig. 8-1(*a*). Desarrollo de un cilindro recto

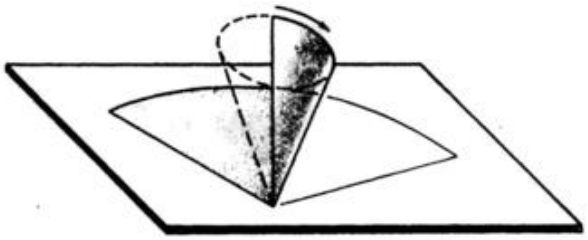


Fig. 8-1(*b*). Desarrollo de un cono circular recto

(7) *Triangulación* — método utilizado en el desarrollo verdadero o aproximado de superficies, por medio del cual las superficies se dividen en triángulos. Una vez que se ha obtenido la longitud verdadera de cada lado de cada triángulo, se unen todos los triángulos en un orden apropiado para formar el desarrollo.

(8) *Superficie reglada* — una superficie generada por una línea recta.

(9) *Superficie de simple curvatura* — una superficie reglada que puede ser desarrollada (por ejemplo: cono, convoluta, cilindro).

(10) *Superficie de doble curvatura* — una superficie generada por una generatriz curva que gira alrededor de un eje o se mueve a lo largo de una curva. La superficie de doble curvatura no tiene elementos rectos (por ejemplo: esfera, toroide, paraboloide).

(11) *Superficie alabeada*— una superficie reglada que no puede ser desarrollada. Dos elementos consecutivos ni se cortan ni son paralelos (por ejemplo: conoide, cilindroide, helicoide).

(12) *Porción recta* — una porción de un plano que es perpendicular al eje.

(13) *Línea de desarrollo* — una línea que se traza perpendicular a las longitudes verdaderas de los elementos, en la vista que muestra el desarrollo.

(14) *Línea de doblez* — arista lateral a lo largo de la cual se dobla la superficie desarrollada para formar la figura que se desea construir.

INTERSECCION

8.2 DETERMINAR LOS PUNTOS EN QUE UNA LINEA RECTA ATRAVIESA A UN CILINDRO

Análisis: Cilindro circular recto. Dibuje una vista que muestre el eje del cilindro como un punto. Muestre también la línea en esta vista y la localización de los puntos de intersección será obvia. Estos puntos se pueden localizar en otras vistas, por simple proyección.

Ejemplo: En la Fig. 8-2 se da la vista de planta y la vista de elevación frontal de la línea y del cilindro. Los puntos X y Y, en la vista de planta, determinan la localización de las intersecciones. Proyecte X y Y a la vista de elevación frontal y determine la visibilidad correcta.

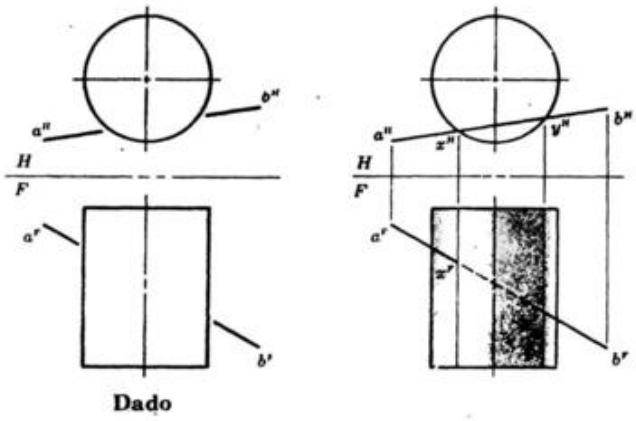
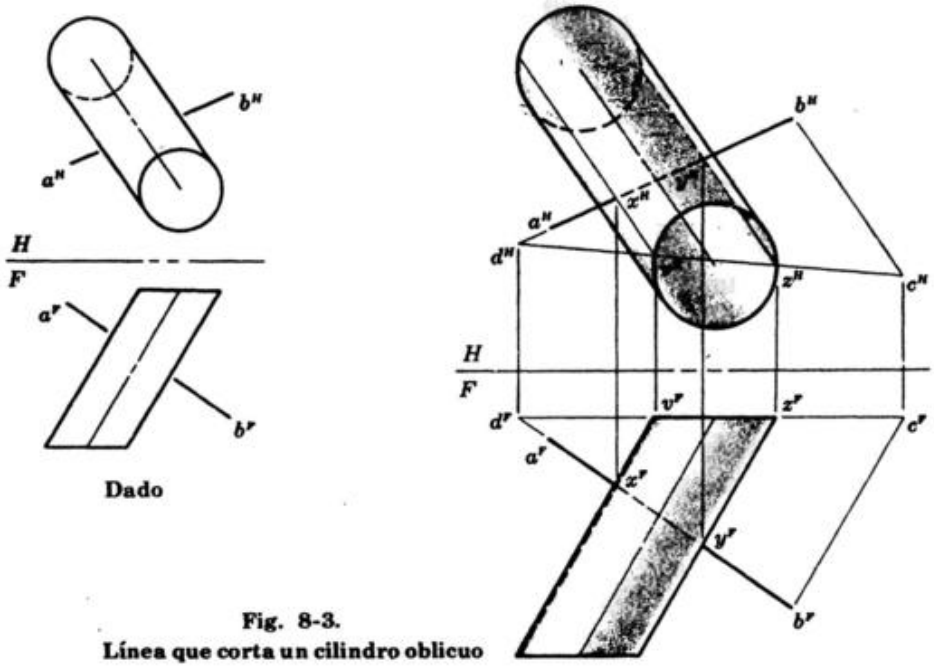


Fig. 8-2. Línea que corta un cilindro circular recto

Análisis: Cilindro oblicuo. Si se construyen vistas sucesivas, hasta mostrar el eje del cilindro como un punto, el problema se reduce al análisis expuesto anteriormente. No obstante, el método del plano cortante en dos vistas es el más usado en el caso de un cilindro oblicuo, debido a que es más fácil de comprender y más rápido.

Un plano cortante que contenga a la línea dada y sea paralelo al eje del cilindro, cortará al cilindro en dos de sus elementos. La intersección de la línea dada con estos elementos determinará los "puntos de penetración".

Ejemplo: En la Fig. 8-3 se da la vista de planta y la vista de elevación frontal del cilindro oblicuo y de la línea. Se dibuja en ambas vistas un plano cortante que contenga a la línea *AB* y sea paralelo al eje del cilindro. Esto se hace trazando la línea *BC* paralela al eje, en ambas vistas. La base superior del cilindro está intersectada por el plano cortante a lo largo de la línea *CD*, la cual corta esta base del cilindro en los puntos *V* y *Z*. Los puntos *V* y *Z* pertenecen al plano cortante y son los extremos superiores de dos elementos del cilindro. Un elemento se traza a partir de *V*, en ambas vistas y el otro elemento se traza a partir de *Z*, en la vista de planta. El elemento que parte de *Z* coincide con el elemento del extremo, en la vista frontal. Ambos elementos se deben trazar paralelos al eje del cilindro. Las intersecciones de estos elementos con la línea *AB* determinan los puntos de penetración *X* y *Y*. Estos puntos de penetración pueden verificarse proyectando de una vista a la otra.



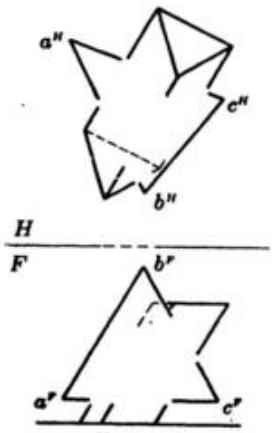
Dado

Fig. 8-3.
Línea que corta un cilindro oblicuo

8.3 INTERSECCION DE UN PLANO Y UN PRISMA

Análisis: Construya una vista de elevación auxiliar que muestre el plano como un filo y los puntos donde el plano corta las aristas del prisma serán evidentes. Una estos puntos de intersección en la vista de planta y en la vista de elevación frontal, mostrando la visibilidad correcta.

Ejemplo: La Fig. 8-4(*a*) muestra las vistas de planta y frontal del plano *ABC* y del prisma oblicuo. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 que muestre el prisma y la vista de filo del plano *ABC* [ver la Fig. 8-4(*b*)]. Las aristas paralelas del prisma cortarán al plano en los puntos 1, 2 y 3. Proyecte estos tres puntos a las vistas de planta y frontal y únalos entre sí por medio de líneas, mostrando la visibilidad correcta del plano y del prisma.



Dado

Fig. 8-4(*a*)

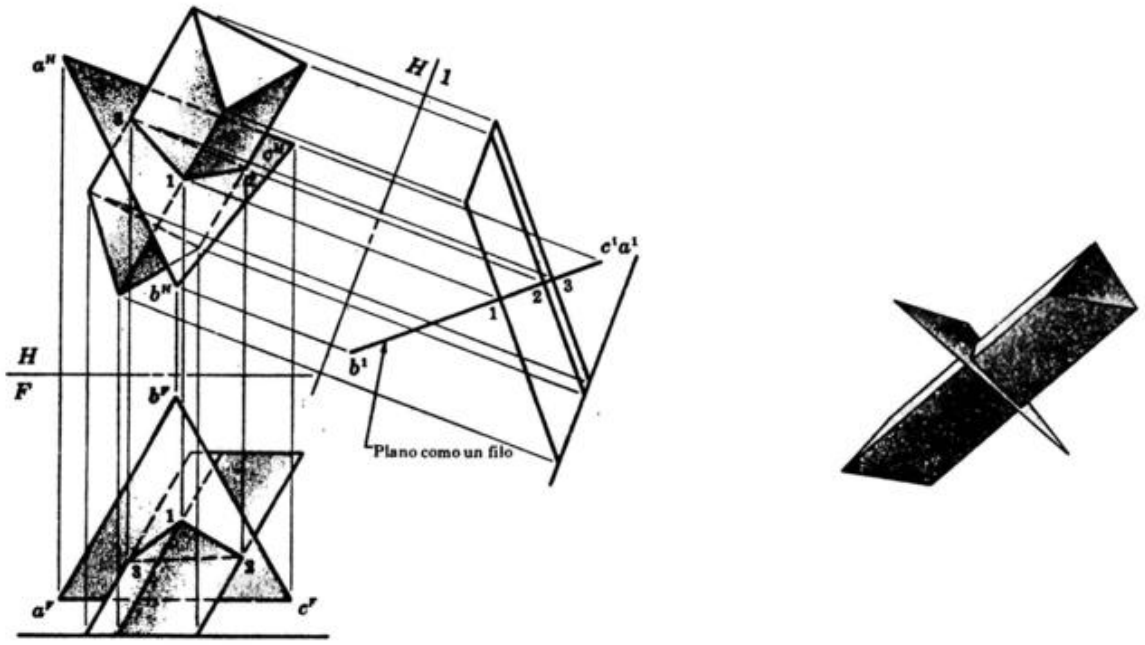


Fig. 8-4(*b*). Intersección de un plano y un prisma

8.4 INTERSECCION DE PRISMAS

A. Método de la vista de perfil

Análisis: Determine los puntos donde las aristas de un prisma penetran en el otro, mostrando la vista de perfil de cada uno de los prismas (por vista de perfil de un prisma queremos dar a entender la vista en que las caras laterales del prisma aparecen como filos). Una los puntos de penetración y determine la visibilidad correcta.

Nota: Si únicamente un prisma aparece de perfil en una de las vistas dadas, se puede construir una nueva vista auxiliar para mostrar la vista de perfil del otro prisma.

Ejemplo: En la Fig. 8-5 se muestran las caras que limitan los dos prismas, en las tres vistas fundamentales. En la vista de planta prolongue las aristas del prisma horizontal hasta que corten la vista de perfil del prisma vertical. En la vista de perfil prolongue las aristas del prisma vertical hasta que corten la vista de perfil del prisma horizontal. Designe estos puntos de penetración como se indica en la figura. Proyecte los puntos de penetración de la vista de planta a la vista frontal, hasta encontrar las proyecciones de los puntos correspondientes, procedentes de la vista de perfil. Por medio de una cuidadosa visualización se determinará la visibilidad correcta.

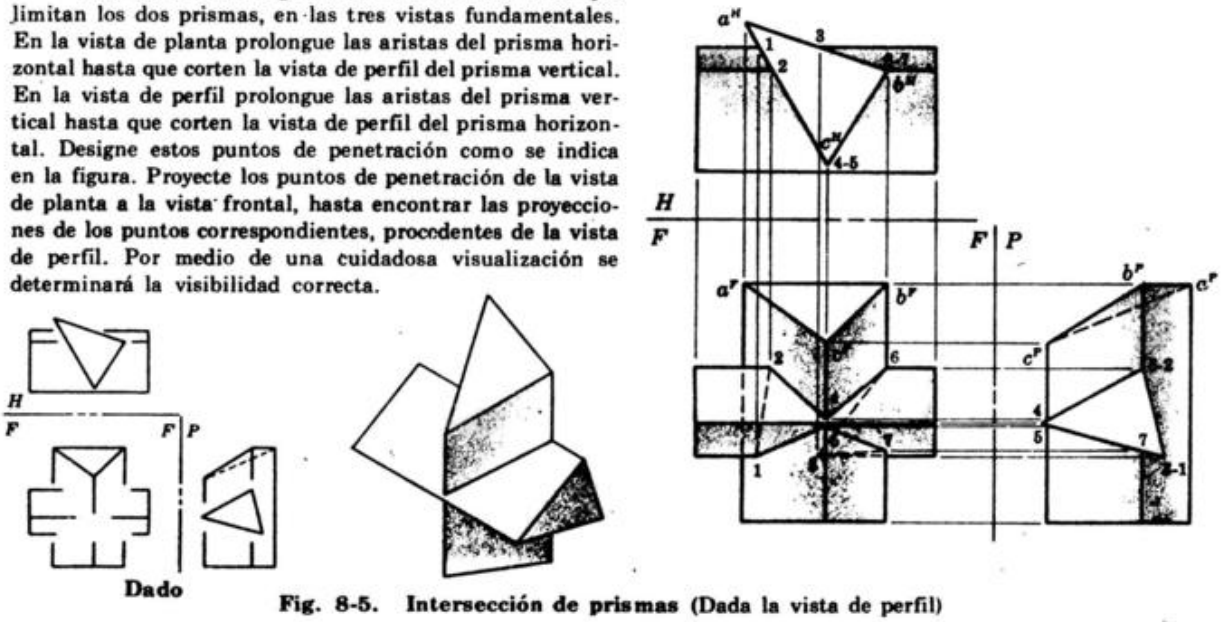


Fig. 8-5. Intersección de prismas (Dada la vista de perfil)

B. Método del plano cortante

Análisis: Los dos prismas deben cortarse por uno o una serie de planos cortantes que determinen los puntos comunes a ambos prismas. Si los planos cortantes escogidos son paralelos a las aristas del prisma, la resolución es más sencilla.

Ejemplo: Se da parte de la vista de planta y parte de la vista de elevación frontal. Ver la Fig. 8-6. En la vista de planta prolongue las aristas del prisma oblicuo hasta que corten las caras verticales del prisma recto. Pase un plano cortante vertical atravesando los dos prismas, como se muestra en la figura. Designe estos puntos como se indica. Por simple proyección se localizarán los puntos 1, 2 y 3 en la vista frontal. Los puntos 6 y 7 pertenecen al plano cortante y son comunes a ambos prismas. Proyecte los puntos 4 y 5 a la vista frontal, a partir de sus localizaciones en la vista de planta. Puesto que los puntos 4 y 6 están sobre la cara superior del prisma oblicuo, la situación exacta del punto 6 en la vista frontal, se determinará proyectando a partir del punto 4, en esta vista, hasta la arista vertical sobre la cual está localizado el punto 6. La misma relación entre los puntos 5 y 7 determina la localización del punto 7 en la vista frontal. Por medio de una adecuada visualización se determinará la visibilidad correcta.

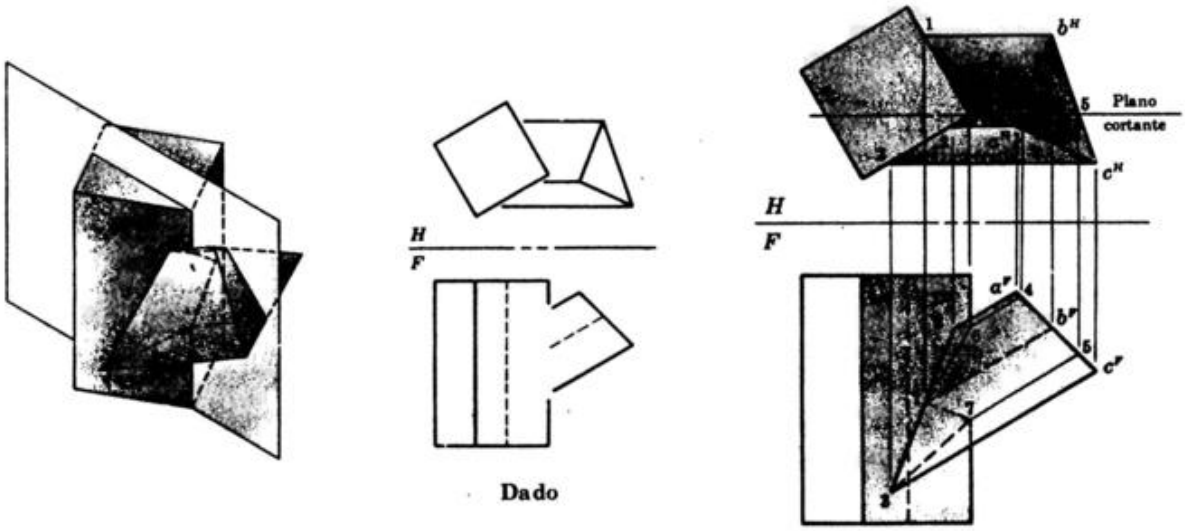


Fig. 8-6. Intersección de prismas (Método del plano cortante)

8.5 INTERSECCION DE UN PRISMA Y UNA PIRAMIDE

Análisis: Construya una vista auxiliar que muestre el prisma de perfil. Utilice el método de los puntos de penetración para localizar los puntos comunes al prisma y a la pirámide.

Ejemplo: La Fig. 8-7(*a*) muestra parte de la vista de planta y parte de la vista de elevación frontal. Dibuje una vista de elevación auxiliar para mostrar la pirámide y la vista de perfil del prisma. Ver la Fig. 8-7(*b*). Designe los puntos 1 a 6 sobre la vista de perfil del prisma, en la vista 1. Los puntos 3 y 4 pueden proyectarse directamente a la vista de planta y luego a la vista de elevación frontal. Pase un plano cortante por los puntos 1-5 y 2-6 que aparezca de filo en la vista 1. Este plano cortante intersectará a *OC* en el punto 7, a *BC* en el punto 8 y a *OA* en el punto 9. Proyecte las líneas 7-8 y 7-9 a la vista de planta para localizar los puntos 1, 2, 5 y 6 en esta vista. Por simple proyección se localizarán estos puntos en sus correspondientes posiciones en la vista frontal. Se puede hacer una verificación de la vista de planta del punto 2, pasando un plano cortante por los puntos 3 y 2, en la vista 1 y prolongándolo hasta que corte a *OB* en el punto 10. Proyecte el punto 10 a la vista de planta y trace una línea desde el punto 3 hasta el punto 10, en esta vista. Si el dibujo es correcto, la línea deberá pasar por el punto 2. Por medio de una adecuada visualización se determina la visibilidad correcta.

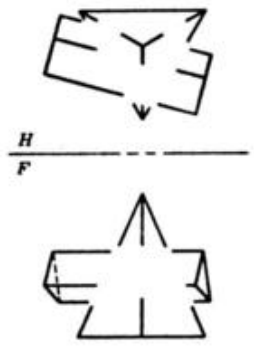


Fig. 8-7(*a*)

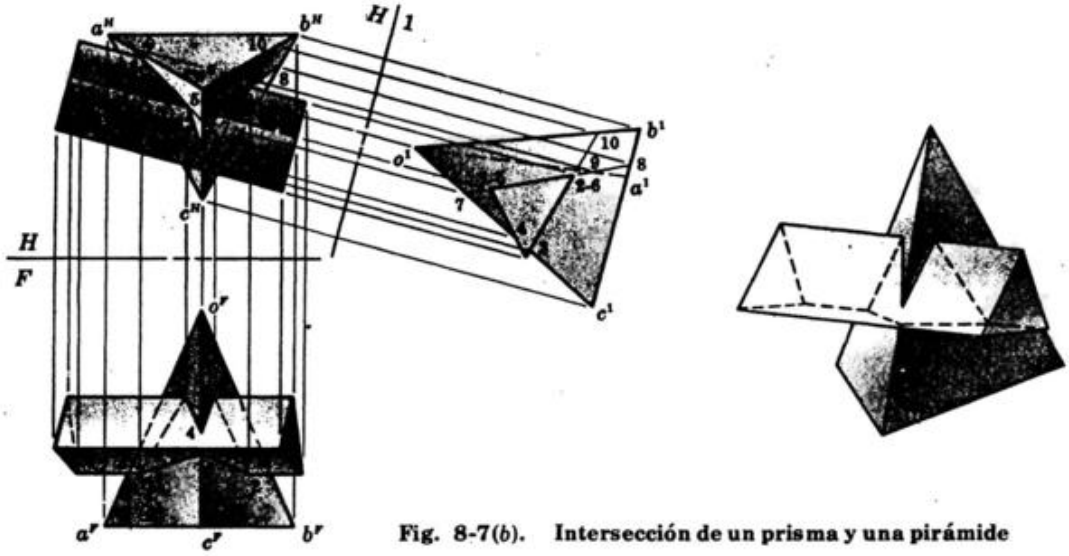


Fig. 8-7(*b*). Intersección de un prisma y una pirámide

8.6 INTERSECCION DE UN CONO Y UN PRISMA (METODO DEL PLANO CORTANTE)

A. Planos cortantes verticales

Análisis: Una serie de planos cortantes verticales que pasen por el eje del cono y corten el prisma, contendrán a los elementos sobre los cuales estarán los puntos de intersección comunes al cono y al prisma.

Ejemplo: La Fig. 8-8 muestra las vistas dadas. En la vista de planta pase una serie de planos cortantes por el eje del cono, que corten la vista de perfil del prisma. Designe estos puntos 0 hasta 6 y *A* hasta *E*, como se señala. Muestre los elementos en la vista frontal. Proyecte los puntos *A*, *B*, *D* y *E* a la vista frontal, hasta que corten los elementos 1, 2, 4 y 5, respectivamente. El punto *C*, en la vista frontal, estará a la misma elevación que los puntos más altos de intersección entre el cono y el prisma que se observan en los elementos extremos del cono, en esta vista. Una los puntos *A* hasta *E* para mostrar la visibilidad correcta de la línea de intersección.

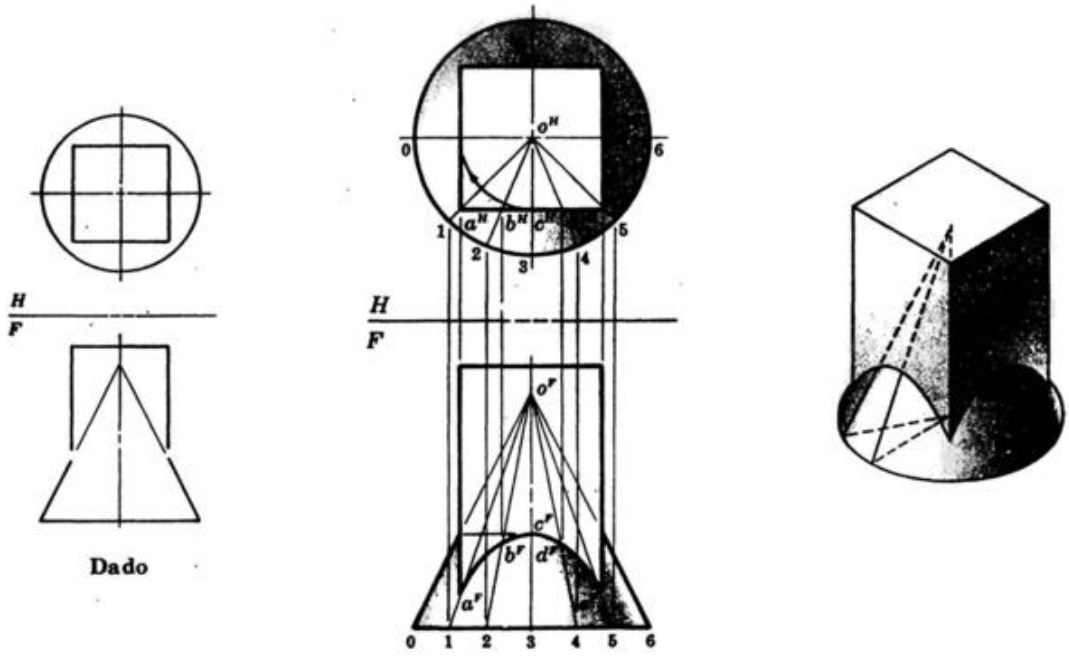


Fig. 8-8. Intersección de un cono y un prisma (Planos cortantes verticales)

B. Planos cortantes horizontales

Análisis: Una serie de planos cortantes horizontales que sean perpendiculares al eje vertical del cono determinarán los puntos de intersección comunes al cono y al prisma.

Ejemplo: La Fig. 8-9 muestra las vistas dadas. En la vista de planta dibuje los círculos 1, 2 y 3, asegurándose de incluir los elementos extremos de la vista de perfil del prisma. Dibuje los planos horizontales cortantes en la vista de elevación frontal. En la vista de planta designe los puntos de intersección de los planos cortantes con el prisma, por medio de las letras *A* hasta *E*. Proyecte estos puntos a la vista frontal hasta que encuentren los correspondientes planos cortantes. Los puntos *A* hasta *E* quedan de esta forma determinados en la vista frontal y deberán entonces unirse para mostrar la visibilidad correcta de la línea de intersección.

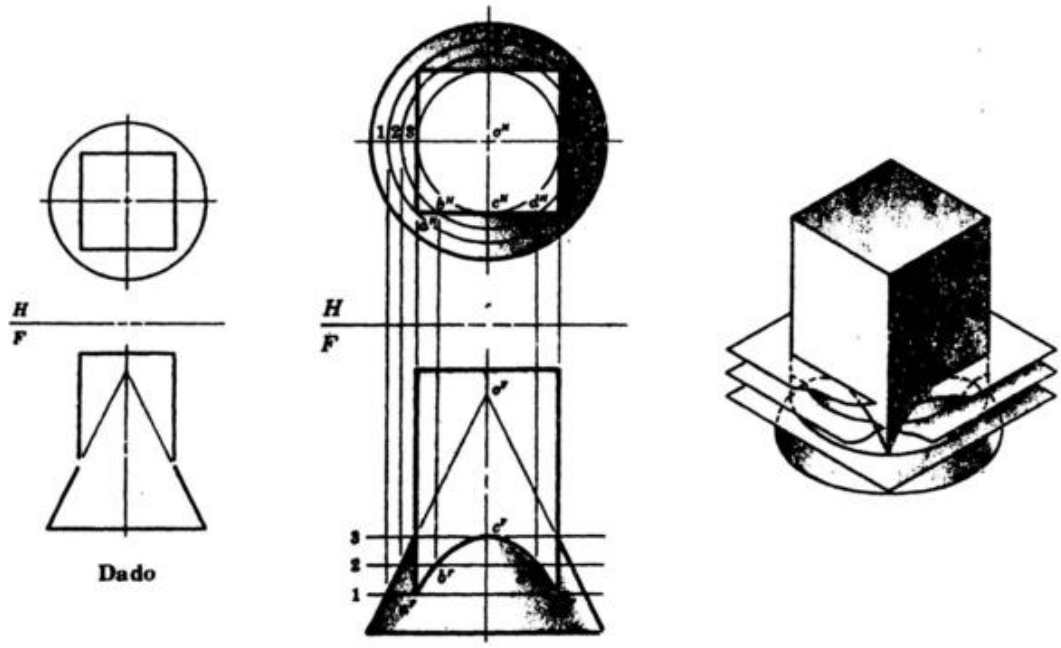


Fig. 8-9. Intersección de un cono y un prisma (Planos cortantes horizontales)

8.7 INTERSECCION DE DOS CILINDROS

Análisis: Localice los elementos correspondientes de ambos cilindros. Las intersecciones de estos elementos determinarán los puntos comunes a ambos cilindros; por tanto, estos puntos estarán localizados sobre la línea de intersección de los dos cilindros.

Ejemplo: Dos cilindros rectos de igual diámetro se dan en la Fig. 8-10(*a*). Divida la mitad derecha de la vista de perfil del cilindro vertical en un número conveniente de segmentos. Ver la Fig. 8-10(*b*). Designe los puntos de la circunferencia con los números 1 hasta 13. En la vista de elevación frontal trace un semicírculo en el extremo del cilindro horizontal, como se muestra. Divida este semicírculo en el mismo número de segmentos que tiene la vista de planta del cilindro vertical. Designe estos puntos, según su elevación, con los mismos números que se utilizaron en la vista de planta del cilindro vertical. En la vista frontal, trace líneas de nivel a partir de estos puntos, hasta que corten las proyecciones de los correspondientes puntos, procedentes de la vista de planta. Una estos puntos, que pertenecen a la línea de intersección de los cilindros, para obtener la visibilidad correcta. Por simetría se determina la línea de intersección completa.

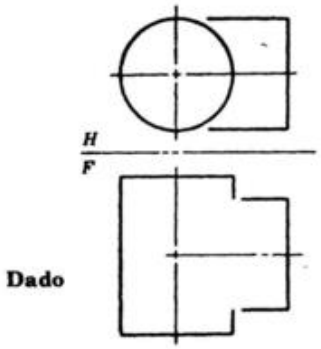


Fig. 8-10(*a*)

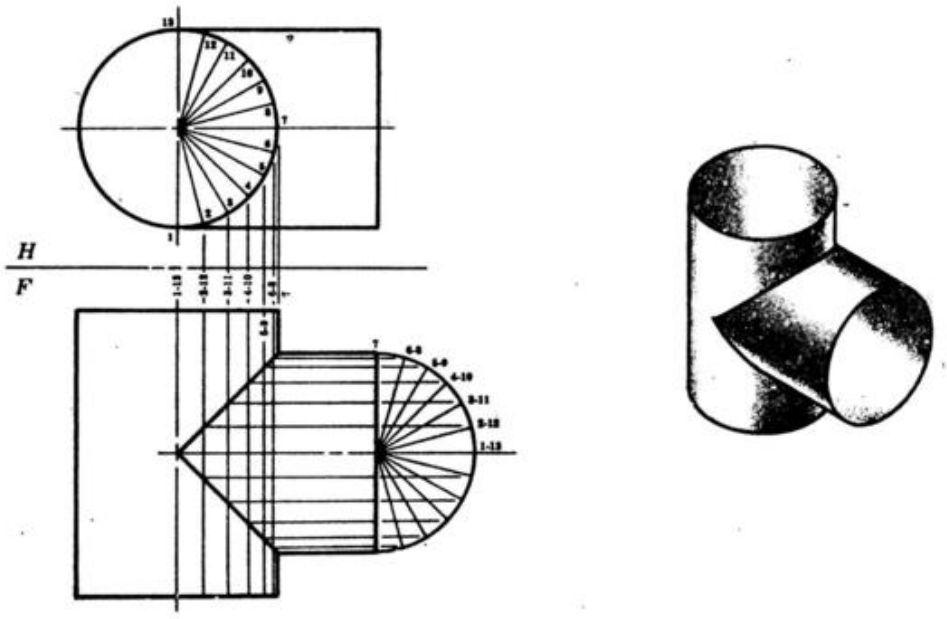


Fig. 8-10(*b*). Intersección de dos cilindros — diámetros iguales

Ejemplo: Dos cilindros rectos de diámetros diferentes. Ver la Fig. 8-11. Dibuje una sección transversal girada del cilindro inclinado, tanto en la vista de planta como en la vista de elevación frontal. Divida estas secciones transversales en un número conveniente de elementos. Designe cada uno de los elementos, asegurándose de que sus posiciones correspondientes son ortogonalmente correctas. En este caso el elemento 5 es el elemento superior y 13 el elemento inferior. El elemento 1 está más alejado del observador que el elemento 9. Muestre todos los elementos del cilindro inclinado en ambas vistas, localizándolos paralelos al eje de este cilindro. En la vista de planta designe los puntos donde los elementos del cilindro inclinado cortan la vista de perfil del cilindro vertical, con sus números correspondientes. Proyecte estos puntos de intersección a la vista frontal, hasta cortar los elementos correspondientes, en esta vista. Estos "puntos de encuentro", tales como 8, 9 y 10, son puntos pertenecientes a la línea de intersección de los dos cilindros. Una estos puntos y muestre cuidadosamente la visibilidad correcta.

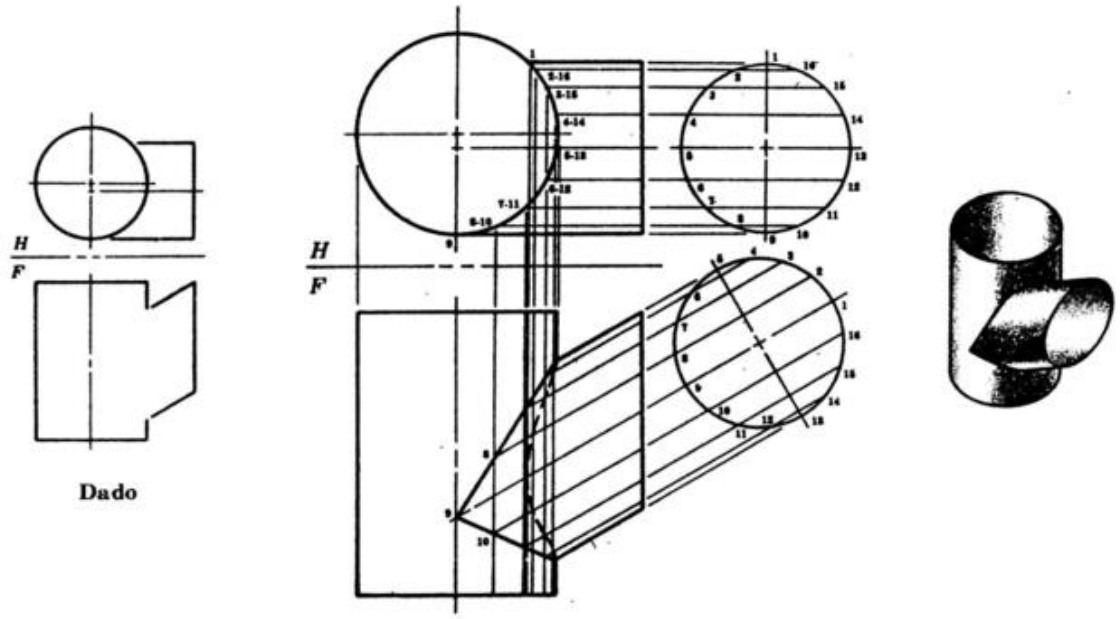


Fig. 8-11. Intersección de dos cilindros — diámetros diferentes

8.8 INTERSECCION DE UN CILINDRO Y UN CONO

A. Método del plano cortante inclinado

Análisis: Una serie de planos cortantes que pasen por el vértice del cono y por la vista de perfil del cilindro, localizará los puntos comunes situados sobre la línea de intersección entre el cono y el cilindro. Ver la Fig. 8-12.

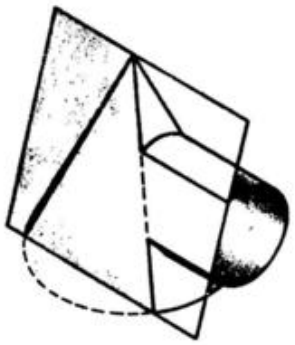


Fig. 8-12

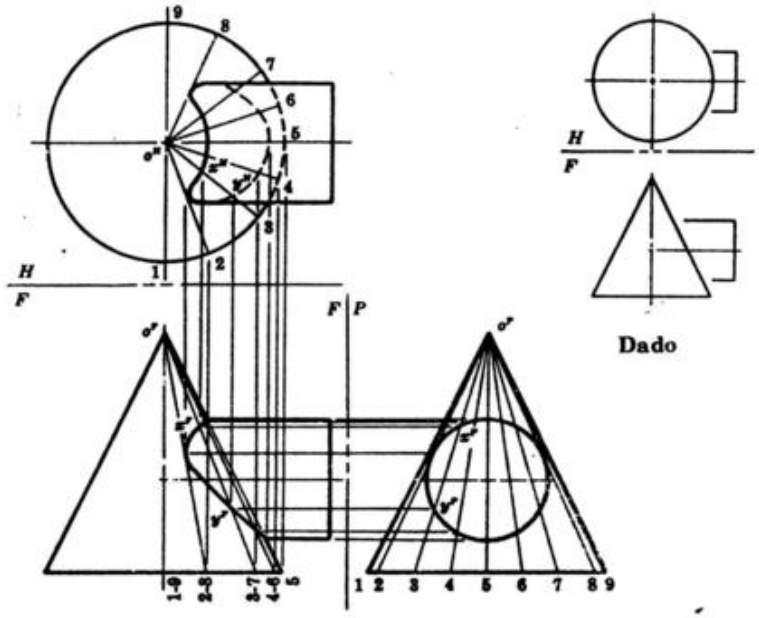


Fig. 8-13. Intersección de un cilindro y un cono (Planos cortantes inclinados)

Ejemplo: Ver la Fig. 8-13. Construya una vista de perfil para mostrar el cono y la vista de perfil del cilindro. Pase una serie de planos cortantes por el vértice *O*, que corten la vista de perfil del cilindro. Designe los elementos situados sobre la línea base del cono, con los números 1 hasta 9. Muestre estos elementos en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Desde cada uno de los puntos de intersección mostrados en la vista de perfil, tales como *X* y *Y*, proyecte a la vista frontal hasta cortar los elementos correspondientes, en esta vista. Debido a que *X* y *Y* están situados sobre el elemento 3 en la vista de perfil, estarán situados sobre el elemento 3 en todas las vistas. Continúe este procedimiento para localizar todos los puntos. Por medio de una cuidadosa visualización se determinará la visibilidad correcta.

B. Método del plano cortante horizontal

Análisis: Una serie de planos cortantes horizontales cortará al cilindro a lo largo de sus elementos y al cono en una serie de círculos concéntricos. Sus intersecciones determinarán los puntos comunes, pertenecientes a la línea de intersección del cono y el cilindro. Ver la Fig. 8-14.

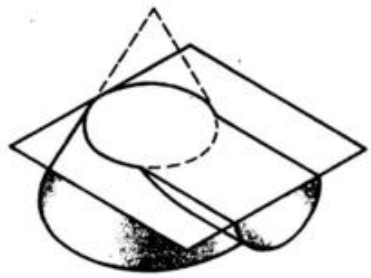


Fig. 8-14

Ejemplo: Ver la Fig. 8-15. Dibuje una sección transversal del cilindro girada en la vista de elevación frontal y divídala como se indica, de modo que en la vista frontal se muestre una serie de siete planos cortantes horizontales. Dibuje en la vista de planta los círculos que representan las superficies del cono cortadas por cada uno de los planos cortantes. Muestre los elementos del cilindro en la vista de planta, teniendo cuidado de localizarlos en sus posiciones correctas, trasladando las distancias, tal como se muestra para los elementos 2 y 6. Las intersecciones de estos elementos con los círculos de corte del cono determinarán los puntos comunes de intersección del cono y del cilindro. Estos puntos pueden proyectarse, entonces, a la vista frontal, hasta que corten los correspondientes elementos, en esta vista. Con una cuidadosa visualización se determinará la visibilidad correcta. Por simetría se determina la línea de intersección completa.

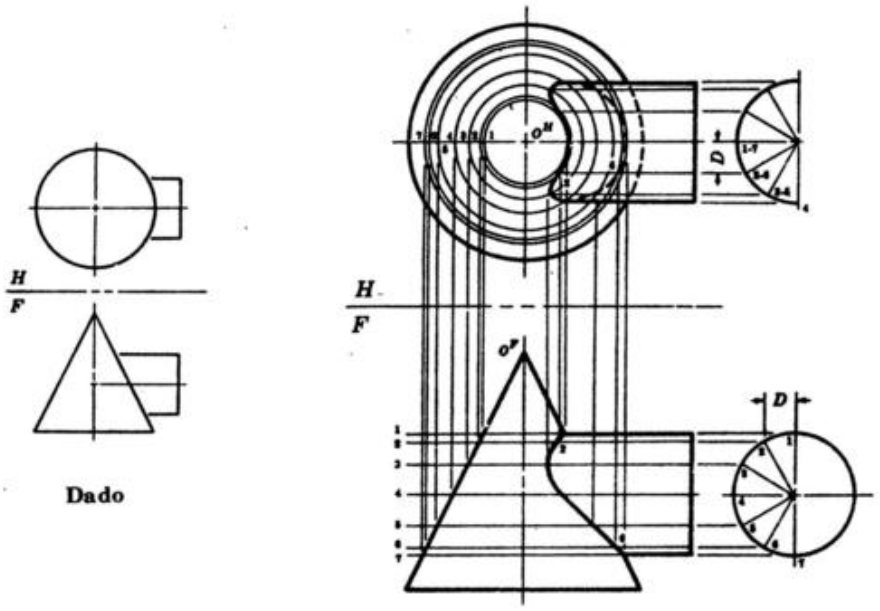


Fig. 8-15. Intersección de un cilindro y un cono (Planos cortantes horizontales)

8.9 INTERSECCION DE DOS CONOS CIRCULARES RECTOS QUE TIENEN SUS BASES PARALELAS

Análisis: Una serie de planos cortantes paralelos a las bases de los conos, cortará a cada uno de los conos en una serie de círculos. La intersección de cada par de círculos (uno perteneciente al primer cono y uno perteneciente al segundo cono) determinará los puntos comunes, situados sobre la línea de intersección de los dos conos dados.

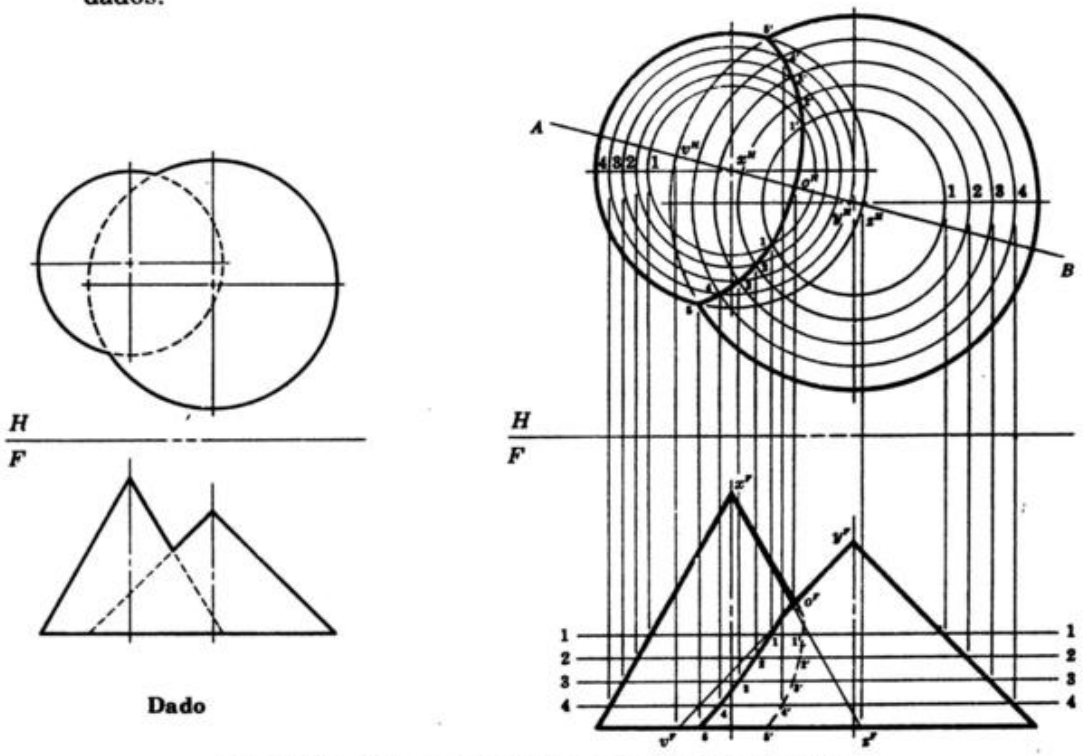


Fig. 8-16. Intersección de dos conos circulares rectos

Ejemplo: En la Fig. 8-16 se da parte de la vista de planta y parte de la vista de elevación frontal de los dos conos. Puesto que las bases de los dos conos son horizontales, se pasa una serie de cuatro planos horizontales que corte los conos, en la vista frontal. Cada uno de estos planos cortará un círculo de cada cono, como se muestra en la vista de planta. La intersección de cada par de círculos pertenecientes a un mismo plano, determinará dos puntos comunes a ambos conos, y estos puntos pertenecen a la línea de intersección de los dos conos. Continúe el proceso hasta que todos los puntos pedidos sean establecidos en la vista de planta y luego proyéctelos a la vista de elevación frontal. Para localizar el punto de intersección más alto, punto *O*, dibuje un plano cortante *AB* que pase por los vértices de los dos conos, puntos *X* y *Y*. Este plano cortante determina un elemento en cada cono, *XZ* y *YV*. La intersección de estos dos elementos en la vista frontal determinará el punto *O*, que es el punto más alto de la línea de intersección de los dos conos. Para obtener la vista de planta del punto *O*, simplemente proyecte desde la vista frontal hasta encontrar el plano cortante *AB*, en la vista de planta. En cuanto a visibilidad se refiere, todos los puntos pertenecientes a la línea de intersección son visibles en la vista de planta. Sin embargo, en la vista de elevación frontal serán visibles únicamente los puntos 1 a 5, puesto que están situados en las mitades de los círculos de corte más cercanas al observador, mientras que los puntos 1' a 5' formarán la porción oculta de la línea de intersección, en la vista frontal, puesto que están situados en las mitades de los círculos de corte más alejadas del observador.

DESARROLLO

8.10 DESARROLLO DE UN PRISMA

Análisis: Se deben determinar las longitudes verdaderas de las aristas junto con sus posiciones relativas respecto a la sección transversal del prisma. Una vista que muestre la sección transversal del prisma, determinará la longitud del desarrollo.

Ejemplo: Se da la vista de planta y la vista de elevación frontal de un prisma exagonal truncado. Ver la Fig. 8-17. Designe las aristas verticales del prisma, como se muestra. Trace una línea de desarrollo a continuación de la base del prisma. A lo largo de esta línea de desarrollo mida las distancias *AB*, *BC*, etc., tomadas de la vista de planta, donde estas distancias aparecen en sus verdaderas longitudes. Trace las aristas perpendiculares a la línea de desarrollo y con sus longitudes verdaderas, tomadas de la vista frontal. Una los puntos 1, 2, 3, etc., con líneas rectas, para completar el desarrollo de la superficie lateral del prisma. Las "líneas de doblez" se señalan por medio de un círculo, y son las líneas por las cuales se ha de doblar para obtener la forma correcta.

Nota: El tamaño verdadero de la base se muestra en la vista de planta. Para obtener el tamaño verdadero de la superficie cortada se proyecta una vista inclinada perpendicular a la vista de filo de la superficie cortada (en la vista frontal) y puede ser trasladado al desarrollo.

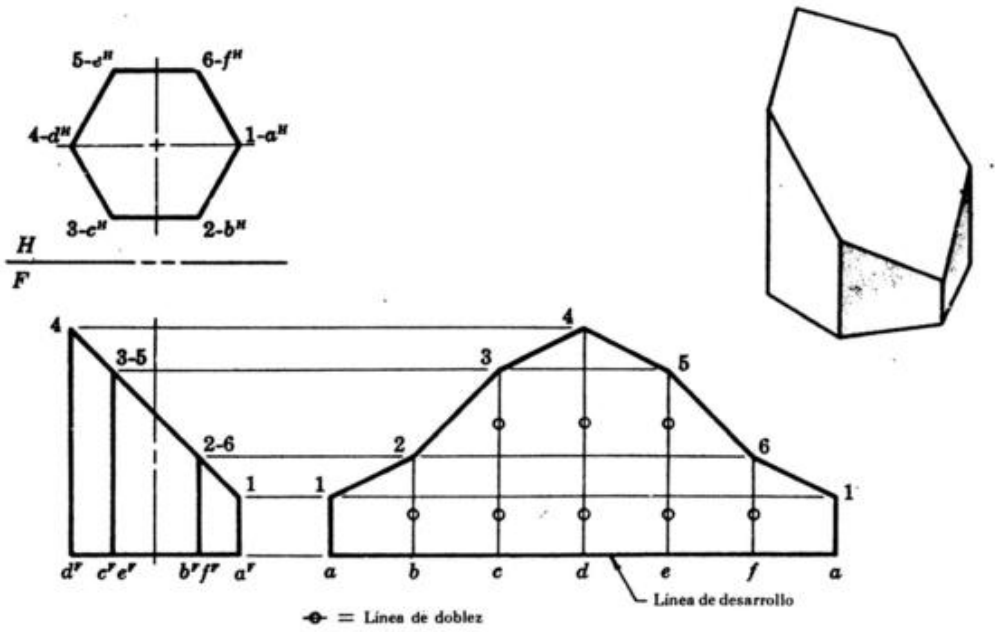


Fig. 8-17. Desarrollo de un prisma

8.11 DESARROLLO DE UNA PIRAMIDE RECTA

Análisis: Determine la longitud verdadera de cada una de las aristas que parten del vértice. El conocimiento de estas longitudes verdaderas y del perímetro de la pirámide es suficiente para hacer el desarrollo.

Ejemplo: Ver la Fig. 8-18. Se da la vista de planta y la vista de elevación frontal de la pirámide. Designe las aristas como se muestra. Todas las aristas inclinadas de la pirámide recta tienen la misma longitud, y por tanto, basta encontrar la longitud verdadera de una sola arista. La longitud verdadera del perímetro de la base se ve en la vista de planta. Gire la arista *OD* en la vista de planta para obtener su longitud verdadera en la vista frontal. Esta distancia "*X*" será también la longitud verdadera de *OA*, *OB* y *OC*. Utilizando la distancia *X* como radio, trace un arco de longitud indefinida. Desde el punto *D*, situado en el arco, tome una cuerda con longitud igual a la distancia *DA*, mostrada en la vista de planta. De este modo se localiza el punto *A* en el desarrollo. Continúe este procedimiento hasta hallar el desarrollo completo.

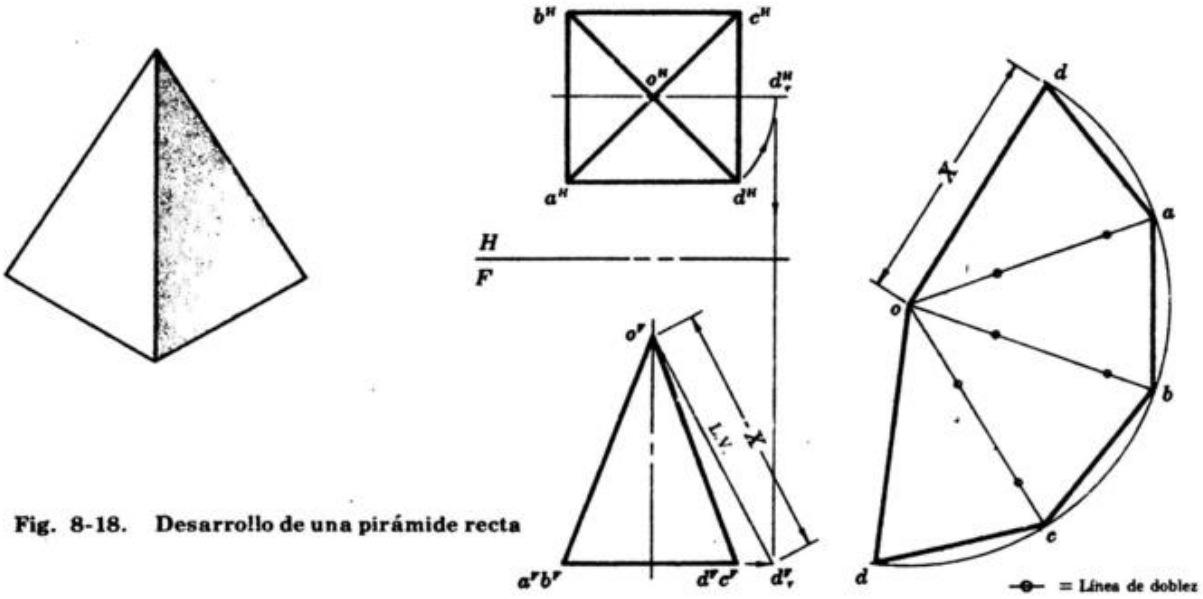
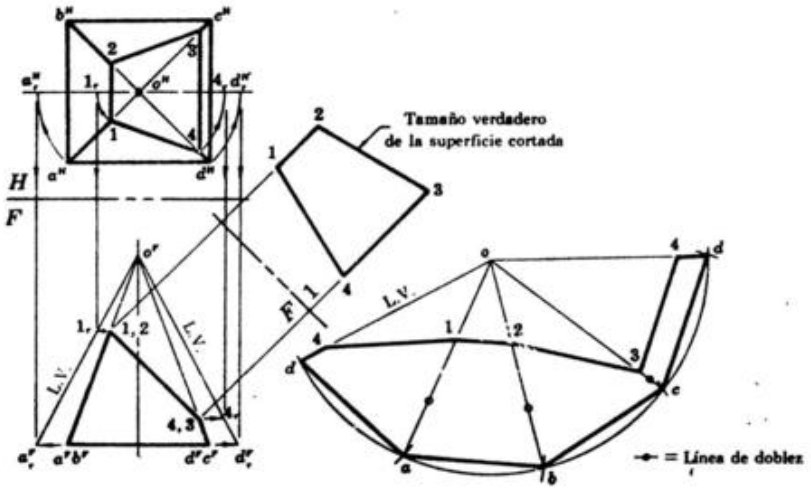


Fig. 8-18. Desarrollo de una pirámide recta

Ejemplo: (Pirámide recta truncada). Ver la Fig. 8-19. Se da la vista de planta y la vista de elevación frontal. Designe las aristas, como se muestra. Puesto que la superficie cortada aparece como un filo en la vista frontal, las aristas *A*-1 y *B*-2 son iguales y *C*-3 tiene la misma longitud que *D*-4. Por tanto, es suficiente determinar la longitud verdadera de dos aristas —en este caso, *A*-1 y *D*-4. Utilizando el método de revolución se pueden medir las longitudes verdaderas de estas dos distancias, en la vista frontal. Usando la distancia en verdadera longitud, *OD*, como radio, trace un arco de longitud indefinida. A lo largo de la línea *OD* mida la longitud verdadera de *D*-4, obtenida en la vista frontal. Con centro en el punto *D* trace un arco, con radio igual a la distancia *DA* medida en la vista de



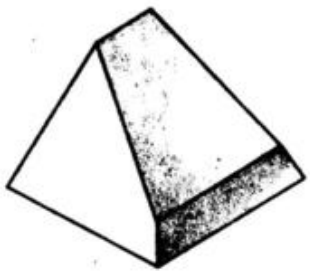


Fig. 8-19. Desarrollo de una pirámide recta truncada

planta, y corte el arco de longitud indefinida. De esta forma se localiza el punto *A* en el desarrollo. Trace una línea desde *A* hasta el punto *O*. A lo largo de esta línea mida la longitud verdadera de *A*-1, obtenida en la vista frontal. Continúe este procedimiento hasta completar el desarrollo. El tamaño verdadero de la base se muestra en la vista de planta. Una vista inclinada 1 determinará el tamaño verdadero de la superficie cortada.

8.12 DESARROLLO DE UNA PIRAMIDE OBLICUA

Análisis: El procedimiento utilizado para desarrollar una pirámide oblicua es esencialmente el mismo que para una pirámide recta, con la diferencia de que las aristas de una pirámide oblicua son de longitudes diferentes. Por tanto, se debe determinar individualmente la longitud verdadera de cada arista. En general, la longitud verdadera de cada arista se puede obtener más fácilmente por el método de revolución.

Ejemplo: Ver la Fig. 8-20. Se da la vista de planta y la vista de elevación frontal de la pirámide oblicua. Designe las aristas como se muestra. Gire todas las aristas en la vista de planta para obtener sus verdaderas longitudes en la vista frontal. Para hacer el desarrollo trace *OA* igual a la longitud verdadera de *OA*, obtenida en la vista frontal. Con centro en *A* describa un arco con radio igual a *AB*, obtenida en la vista de planta. Con centro en *O* describa un arco con radio igual a la longitud verdadera de *OB*, obtenida en la vista frontal, hasta que corte el arco que tiene su centro en *A*, trazado previamente. Esta intersección determinará el punto *B* en el desarrollo. Continúe el procedimiento hasta completar el desarrollo.

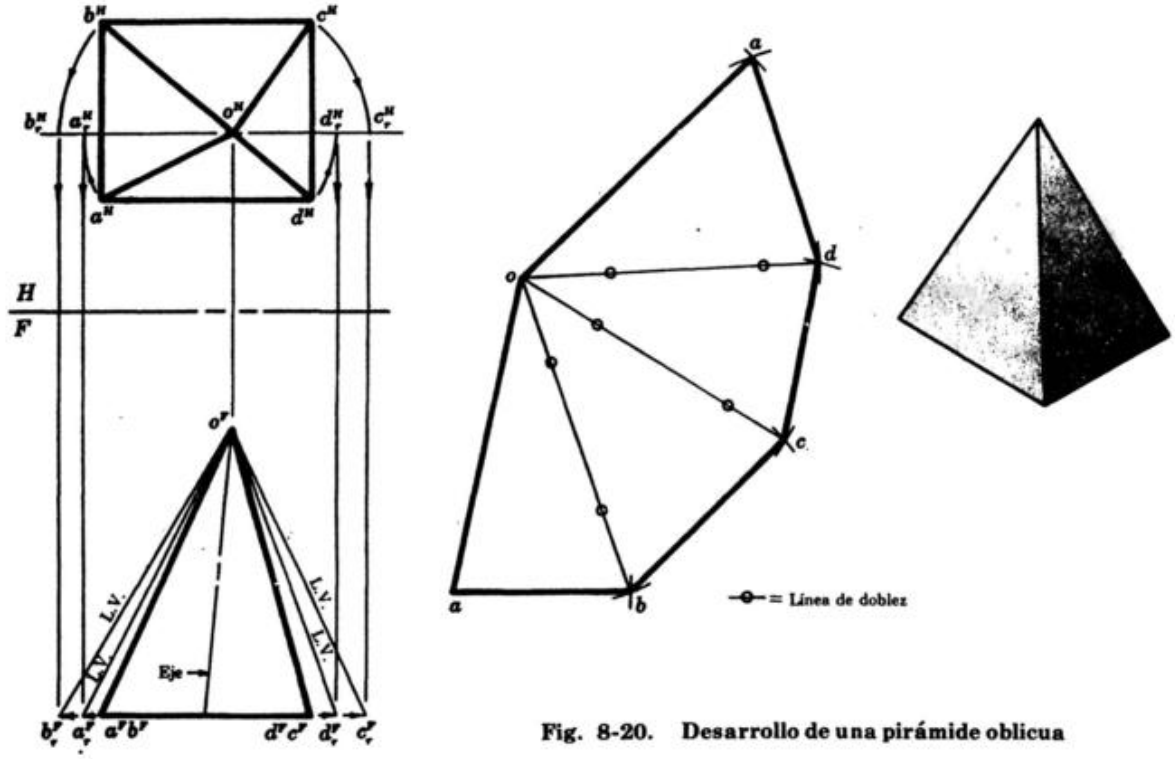


Fig. 8-20. Desarrollo de una pirámide oblicua

8.13 DESARROLLO DE UN CILINDRO CIRCULAR RECTO

Análisis: La Fig. 8-1(*a*) muestra cómo se "desenvuelve" un cilindro para obtener su desarrollo. Los elementos del cilindro deben aparecer como líneas en verdadera longitud y la línea de desarrollo debe ser igual a la circunferencia del cilindro. En el desarrollo, las distancias entre los elementos en sus verdaderas longitudes deben ser iguales a las distancias entre los elementos, tal como aparecen en la vista de la sección transversal del cilindro.

Ejemplo: Remítase a la Fig. 8-21. Se da la vista de planta y la vista de elevación frontal de un cilindro recto truncado. En la vista de planta divida la circunferencia en un número conveniente de partes —en este caso, 16. Muestre y designe estos elementos verticales en ambas vistas. Las longitudes verdaderas de todos los elementos se muestran en la vista frontal. Trace una línea de desarrollo directamente al lado de la base del cilindro. La longitud de la línea de desarrollo se establece por el cálculo de la circunferencia igual a πD o bien utilizando un compás de puntas fijas y tomando la suma de las cuerdas trazadas entre los elementos, como se muestra en la vista de planta. Este último método se prefiere. Si el círculo se divide en 16 partes (como se muestra), con el método de las cuerdas resulta un error despreciable de más o menos 0,6 por ciento. Designe todos los elementos y trácelos perpendiculares a la línea de desarrollo, dándoles las longitudes que tienen en la vista frontal, por simple proyección. Una los extremos superiores de los elementos, en el desarrollo, utilizando un curvígrafo. El tamaño verdadero de la base del cilindro se muestra en la vista de planta. Una vista inclinada 1 mostrará el tamaño verdadero de la superficie cortada. Si es necesario, agregue estas superficies, en su tamaño verdadero, a la superficie del desarrollo.

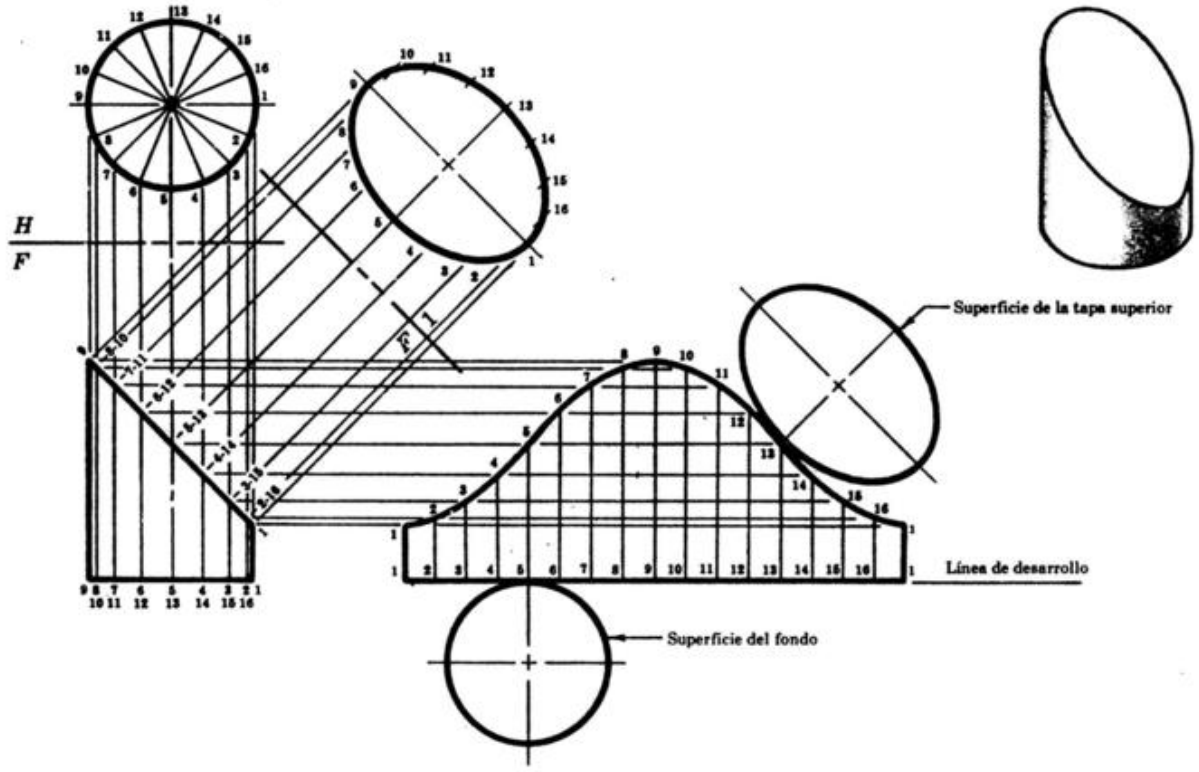


Fig. 8-21.
Desarrollo de un cilindro circular recto truncado

8.14 DESARROLLO DE UN CILINDRO OBLICUO

Análisis: Se debe construir una vista que muestre las longitudes verdaderas de los elementos del cilindro. Luego se proyecta otra vista que muestre la sección transversal del cilindro y la distancia verdadera entre los elementos, los cuales aparecen como puntos en esta vista.

Ejemplo: Ver la Fig. 8-22. Se da la vista de planta y la vista de elevación frontal. Construya una vista de elevación auxiliar que muestre el eje del cilindro, XY, en su verdadera longitud. Muestre una sección transversal del cilindro girada y tome en la mitad de la elipse seis divisiones iguales, como se muestra. Designe estos elementos con los números 1 a 7 y proyéctelos a la vista de elevación 1, donde aparecerán en sus verdaderas longitudes y serán paralelos al eje XY. Trace la línea de desarrollo perpendicular a la longitud verdadera del eje y directamente al lado del elemento 1. A lo largo de la línea de desarrollo mida seis espacios iguales a las longitudes de las cuerdas 1-2, 2-3, etc., mostradas en la sección transversal girada del cilindro. Dibuje los elementos perpendiculares a la línea de desarrollo. A partir de la vista 1 proyecte los puntos extremos de los elementos 1 a 7 hasta que corten los elementos correspondientes en el desarrollo. Una estos puntos de intersección, utilizando un curvígrafo. Puesto que el cilindro es simétrico, el desarrollo de medio cilindro basta para explicar el método utilizado.

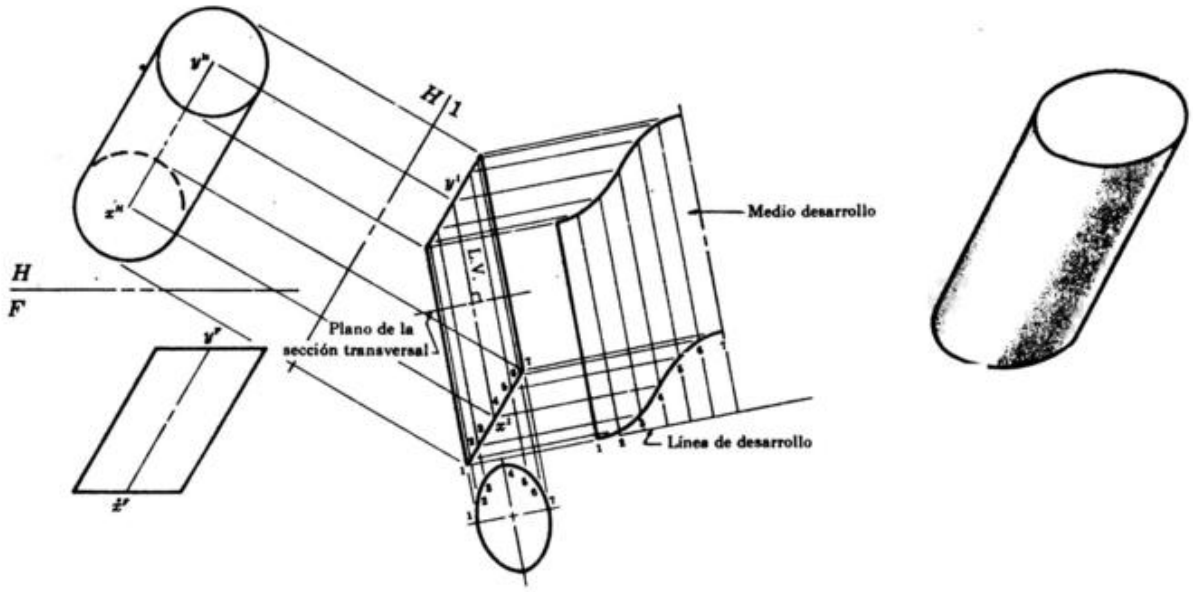


Fig. 8-22. Desarrollo de un cilindro oblicuo

8.15 DESARROLLO DE UN CONO CIRCULAR RECTO

Análisis: La Fig. 8-1(*b*) muestra cómo se "desenvuelve" un cono para hacer su desarrollo. Todos los elementos son de igual longitud y esta longitud es igual a la altura inclinada del cono, siempre que el cono sea un cono circular recto y no esté truncado. Si el cono circular recto está truncado, se debe determinar separadamente la longitud verdadera de cada elemento. En el desarrollo del cono la base se convierte en un arco circular, cuya longitud es igual a la circunferencia de la base del cono.

Ejemplo: (Cono circular recto). Ver la Fig. 8-23. En la vista de planta divida el círculo de la base en partes iguales para establecer la localización de doce elementos igualmente espaciados. Dibuje y designe estos elementos tanto en la vista de planta como en la vista de elevación frontal. La longitud de todos los elementos debe ser igual a la distancia *A*. Localice el punto *O* del desarrollo en una posición conveniente sobre el papel. Utilizando la distancia *A* como radio, trace un arco de longitud indefinida. Comience con el elemento 1 y trace, con centro en 1, un arco con radio igual a la distancia *B* entre los puntos 1 y 2, mostrada en la vista de planta, hasta cortar el arco de longitud indefinida. Continúe esta operación para localizar todos los elementos, asegurándose de terminar el desarrollo con el mismo elemento con que se empezó.

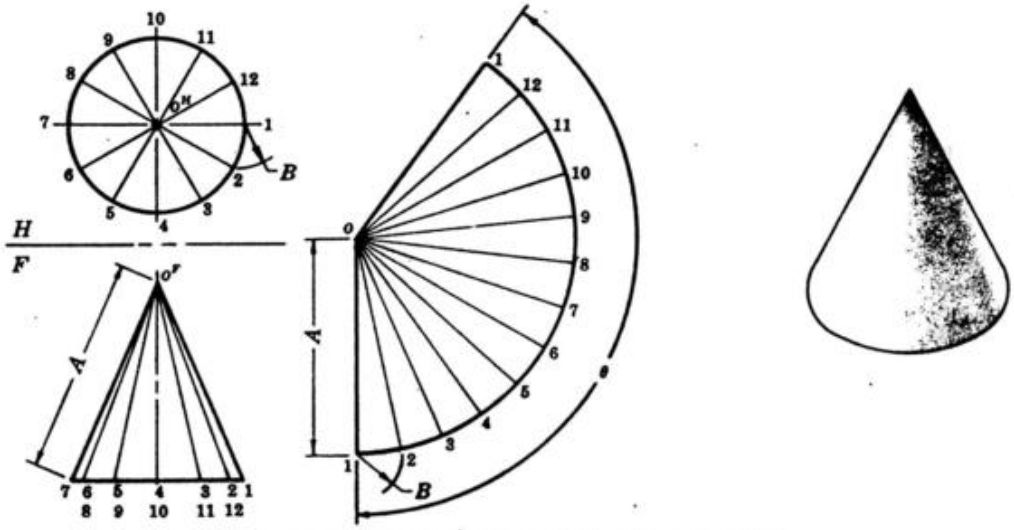


Fig. 8-23. Desarrollo de un cono circular recto

Nota: El método gráfico expuesto es generalmente satisfactorio, y si se divide la base circular en un número mayor de partes, se obtendrá un mayor grado de exactitud. No obstante, el arco circular del desarrollo se puede calcular matemáticamente con gran precisión, si fuera necesario. Si se prefiere este último método, se utiliza la siguiente fórmula: $\theta = \frac{R}{S}(360°)$, donde R es el radio de la base y S es igual a la altura inclinada del cono. Si el desarrollo es simétrico, basta con mostrar medio desarrollo, con tal que la división se haga pasar a través de un eje simétrico.

Ejemplo: (Cono circular recto truncado). Ver la Fig. 8-24. Divida el círculo de la base en 12 partes iguales para establecer la localización de 12 elementos igualmente espaciados, en la vista de planta. Dibuje y designe estos elementos tanto en la vista de planta como en la vista de elevación frontal. Puesto que el cono está truncado, únicamente los elementos 1 y 7 muestran sus longitudes verdaderas en la vista frontal. Por tanto, el punto más alto de cada uno de los otros elementos se gira en la vista de planta hasta situar cada elemento en un plano paralelo al plano frontal. Asuma un plano que pase por los elementos 1 y 7, en la vista de planta. Las longitudes verdaderas de los elementos 2 a 12 se pueden medir ahora en la vista frontal, trazando líneas de nivel desde sus puntos más altos hasta tocar el elemento extremo O-1. La longitud verdadera del elemento 1, el elemento más corto, será igual a O-1 menos O-B, en la vista frontal. La longitud verdadera de cada elemento se determinará de este mismo modo. La longitud verdadera de los elementos 4 y 10, por ejemplo, será igual a O-1 menos O-C, en la vista frontal. Para el desarrollo verdadero trace un arco circular con radio igual a O-1, obtenido en la vista frontal, y divídalo en doce espacios, cada uno con una longitud A, como se muestra. La longitud verdadera de cada elemento, obtenida en la vista frontal, se trazará sobre su línea radial correspondiente. Se utilizará un curvígrafo para trazar un desarrollo suave.

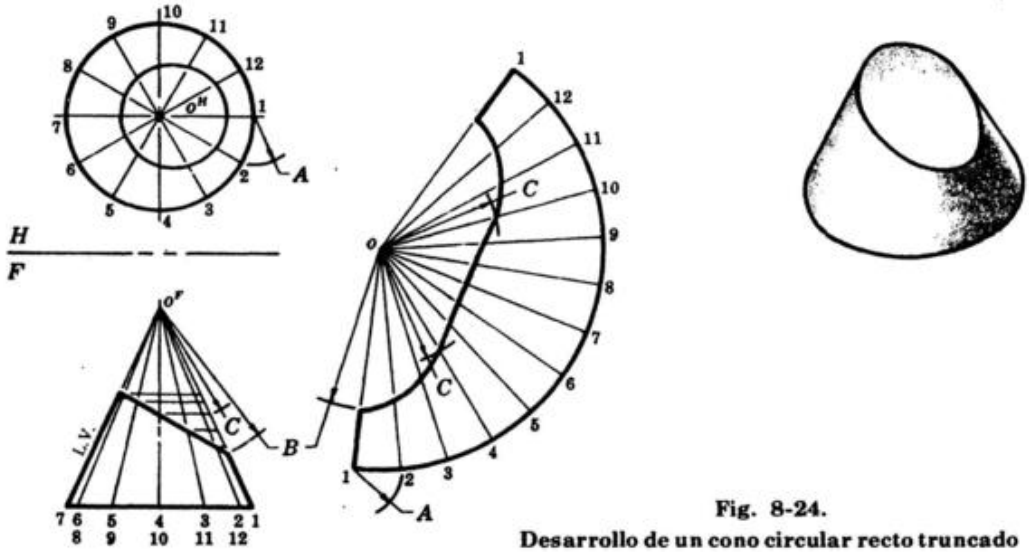


Fig. 8-24.
Desarrollo de un cono circular recto truncado

8.16 DESARROLLO DE UN CONO OBLICUO

Análisis: Los elementos serán de diferentes longitudes y por tanto la longitud verdadera de cada elemento se debe determinar separadamente. La base del cono determinará la longitud del desarrollo, pero esta base no se desarrollará en la forma de arco circular vista en el Art. 8.15.

Ejemplo: Fig. 8-25. Se da la vista de planta y la vista de elevación frontal del cono oblicuo. En la vista de planta divida la circunferencia de la base en doce partes. Muestre estos doce elementos en ambas vistas. En la vista de planta gire los elementos hasta localizarlos en un plano frontal, para obtener sus longitudes verdaderas, como se muestra en el diagrama de longitudes verdaderas. Trace una línea O-1 para comenzar el desarrollo. Con centro en el punto 1 trace un arco con radio igual a la longitud de la cuerda "A", la cual se mide entre dos elementos consecutivos sobre la base del cono, en la vista de planta. Con centro en O trace un arco con radio igual a la longitud verdadera de O-2, obtenida en el diagrama de longitudes verdaderas. La intersección de este arco con el arco que tiene su centro en el punto 1 determinará el punto 2 en el desarrollo. Continúe este procedimiento hasta completar el desarrollo. Una estos puntos con una curva suave.

Nota: Si el cono oblicuo ha sido truncado, el procedimiento será el mismo, con la diferencia de que el punto más alto de cada elemento se proyecta desde la vista frontal hasta el diagrama de longitudes verdaderas. En este caso el cono debe cortarse a lo largo del elemento más corto.

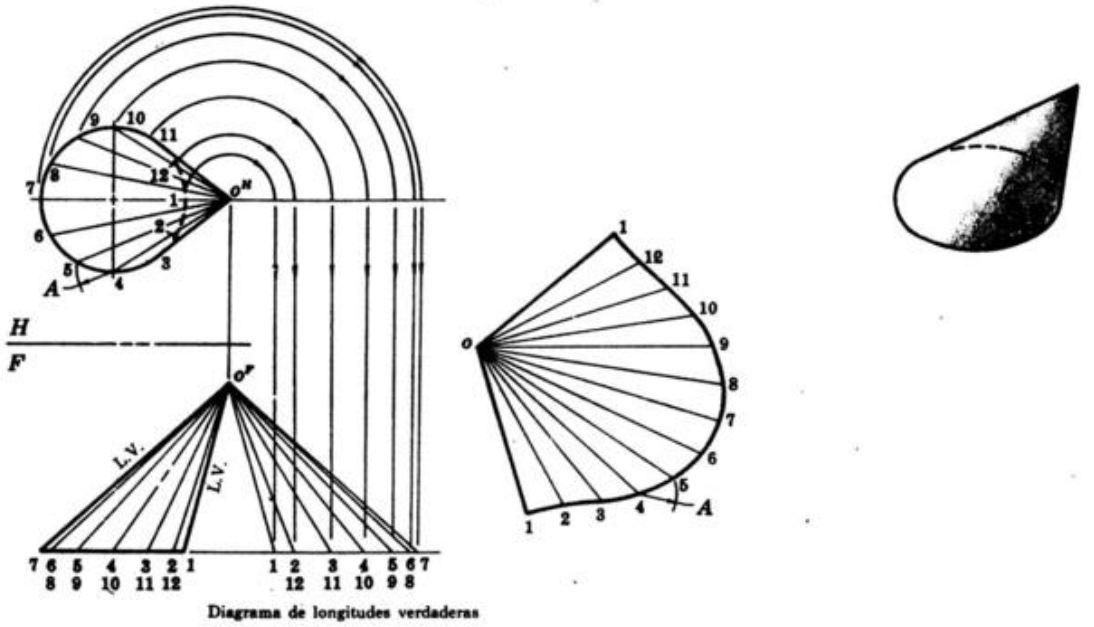


Fig. 8-25. Desarrollo de un cono oblicuo

8.17 TRANSICIONES

Hay muchas figuras irregulares que se utilizan comúnmente en trabajos con láminas metálicas, cuyos modelos pueden desarrollarse por métodos diferentes de los expuestos anteriormente en este capítulo. Los tipos más comunes de figuras irregulares son los que conectan dos secciones de ventilación o dos conductos de calefacción de diferentes formas y tamaños. Estas figuras irregulares se llaman adaptadores y sus superficies pueden desarrollarse real o aproximadamente por triangulación (ver definiciones en el Art. 8.1).

Debido a que un gran número de adaptadores se pueden necesitar con frecuencia, el autor ha escogido dos de los tipos más comunes, confiando en que, con ellos quedarán expresados claramente los principios fundamentales utilizados en todos los demás desarrollos de adaptadores.

A. Adaptador — Cuadrado a cuadrado

Análisis: Determine las longitudes verdaderas de los lados de las caras triangulares y coloque estas caras en un orden adecuado en el desarrollo.

Nota: El mismo análisis se aplicará para adaptadores de rectángulo a cuadrado y de rectángulo a rectángulo.

Ejemplo: En la Fig. 8-26 se da la vista de planta y la vista de elevación frontal de un adaptador. Los tamaños verdaderos del cuadrado de la base y del cuadrado de la parte superior se muestran en la vista de planta. A un lado de la vista de elevación frontal construya un diagrama de longitudes verdaderas para obtener la longitud verdadera de la línea de costura 3-*E*, como también la longitud verdadera de la línea de doblez 3-*C*. Puesto que todas las líneas que unen las esquinas en la vista de planta, son iguales, la longitud verdadera obtenida para 3-*C* se usará también para 2-*B*, 2-*C*, 1-*A*, 1-*B*, etc.

Para trazar el desarrollo completo en una sola pieza, trace la longitud verdadera de la línea de costura 3-*E*. Con centro en el punto 3 trace un arco con radio igual a la longitud verdadera de 3-*C*. Con centro en el punto *E* trace un arco con radio igual a la longitud verdadera de *E*-*C*, la cual se puede obtener en la vista de planta. La intersección de estos dos arcos determina la localización del punto *C* en el desarrollo. Similarmente, la intersección de los arcos 3-2, con centro en 3, y *C*-2, con centro en *C*, determina el punto 2. Continúe este procedimiento hasta que trace nuevamente la línea de costura en el otro extremo del desarrollo.

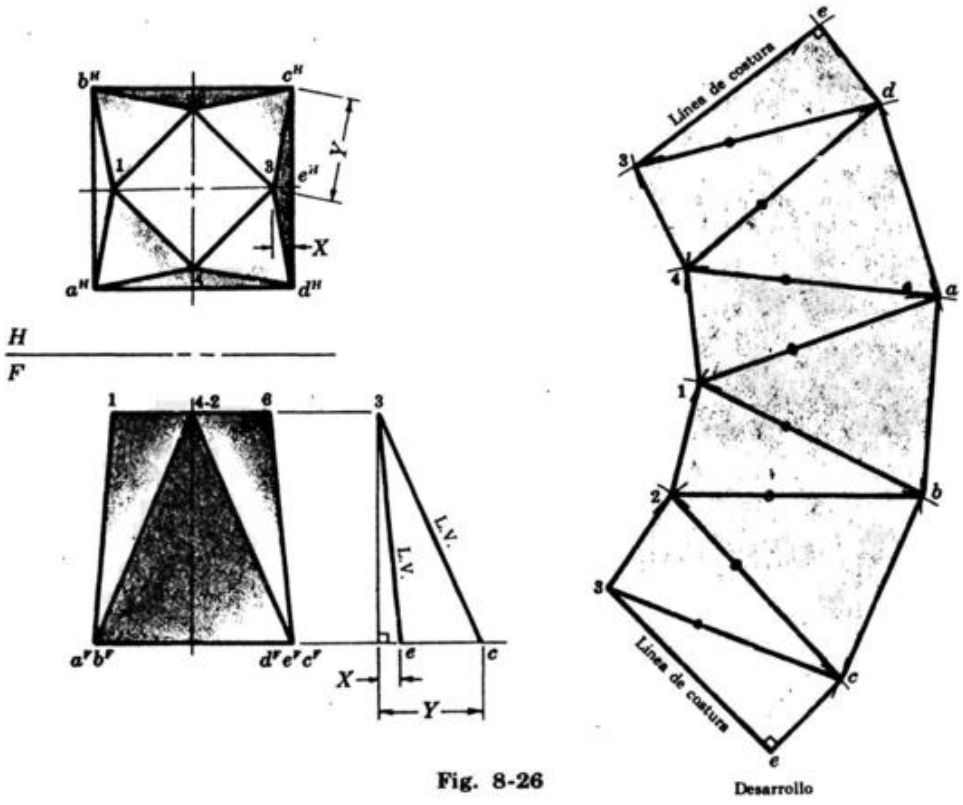


Fig. 8-26

B. Adaptador — Rectángulo a círculo

Análisis: Divida la superficie del adaptador en áreas triangulares y determine las longitudes verdaderas de los lados de cada triángulo, lo mismo que en el análisis anterior. Estos lados de los triángulos son, en realidad, las líneas de doblez necesarias para cambiar la sección del adaptador: De forma rectangular a forma circular. Una vez que se han obtenido todos los triángulos en sus tamaños verdaderos, se deben colocar en un orden apropiado para obtener el desarrollo correcto.

Nota: Se aplicará este mismo análisis para un adaptador de forma cuadrada a forma circular.

Ejemplo: En la Fig. 8-27 se da una parte de la vista de planta y una parte de la vista de elevación frontal. Puesto que el círculo está en el centro del rectángulo, formando dos mitades simétricas, no es necesario dividir todo el círculo en partes iguales. En efecto, en este caso solamente es necesario dividir una cuarta parte del círculo, pero, para mayor claridad, vamos a dividir la mitad del círculo más cercana al observador. Una los puntos numerados, situados sobre el círculo, con los puntos *A* y *D*, situados sobre la base rectangular. Estas líneas formarán las bases de una serie de triángulos, cuyas alturas son iguales a la altura vertical del adaptador y cuyas hipotenusas serán iguales a las distancias verdaderas desde *A* (ó *D*) hasta los puntos localizados sobre la circunferencia. (Ver el diagrama de longitudes verdaderas situado a la derecha de la vista de elevación frontal.) Asuma que el adaptador se hace en dos partes, teniendo costuras en 5-*E* y 7-*F*.

Para comenzar la mitad del desarrollo, trace una línea *AD*, de longitud igual a la vista de planta de *AD*. Con centros en los puntos *A* y *D* trace arcos que tengan radios iguales a las longitudes verdaderas de *A*-1 y *D*-1, mostradas en el diagrama de longitudes verdaderas. La intersección de estos arcos determina el punto 1 en el desarrollo. Enseguida, con los puntos *A* y *D* como centros y con radios iguales a las longitudes verdaderas de *A*-2, *A*-3, *A*-4, etc., (mostradas en el diagrama de longitudes verdaderas) trace arcos de longitud indefinida. Mida con un compás la longitud de la cuerda tendida entre dos puntos numerados consecutivos en el semicírculo más cercano al observador, situado en la vista de planta, y, empezando en el punto 1 del desarrollo, tome cuatro espacios a cada lado. Por los puntos de intersección así obtenidos trace líneas a los puntos *A* y *D*, como se muestra. Con centros en los puntos 5 y 7, en el desarrollo, trace dos arcos con sus radios iguales a las longitudes verdaderas de 5-*E* y 7-*F*, mostradas en la vista de elevación frontal. Utilizando los puntos *A* y *D* como centros, trace dos arcos con sus radios iguales a *A*-*E* y *D*-*F*, respectivamente (cuyas longitudes verdaderas se muestran en la vista de planta). Las intersecciones así obtenidas localizarán los puntos *E* y *F* en el desarrollo.

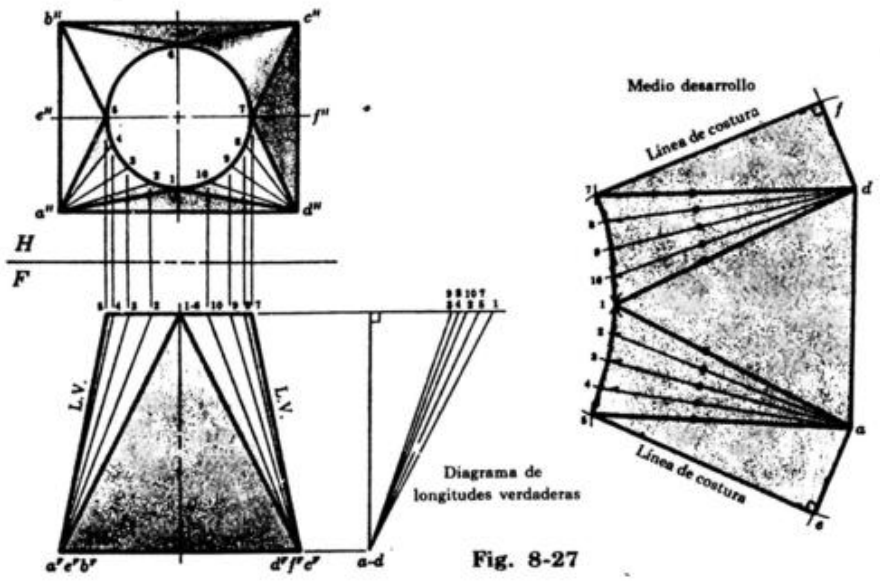


Fig. 8-27

Problemas resueltos

1. **Dado:** La línea *AB* es el eje de un cilindro hueco que tiene un diámetro de $1\frac{1}{2}''$ (ver la Fig. 8-28). El punto *B* está $1\frac{1}{2}''$ exactamente al este y $1\frac{1}{2}''$ por debajo de *A*. La línea *XY* atraviesa al cilindro. El punto *X* está $1\frac{1}{16}''$ al oeste, $1\frac{1}{4}''$ al norte y $1\frac{1}{2}''$ por debajo de *A*. El punto *Y* está $1\frac{1}{2}''$ al este, $\frac{7}{8}''$ al sur y a la misma elevación que *A*. Escala: $\frac{1}{2}'' = 1''$.
Problema: Usando únicamente dos vistas, determine los dos puntos donde la línea *XY* atraviesa al cilindro.

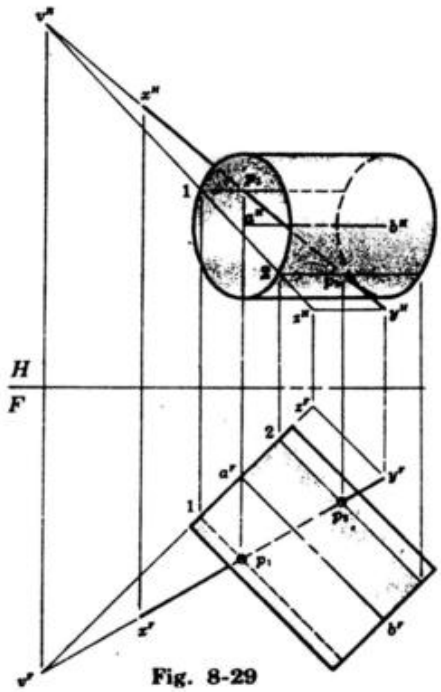


Fig. 8-29

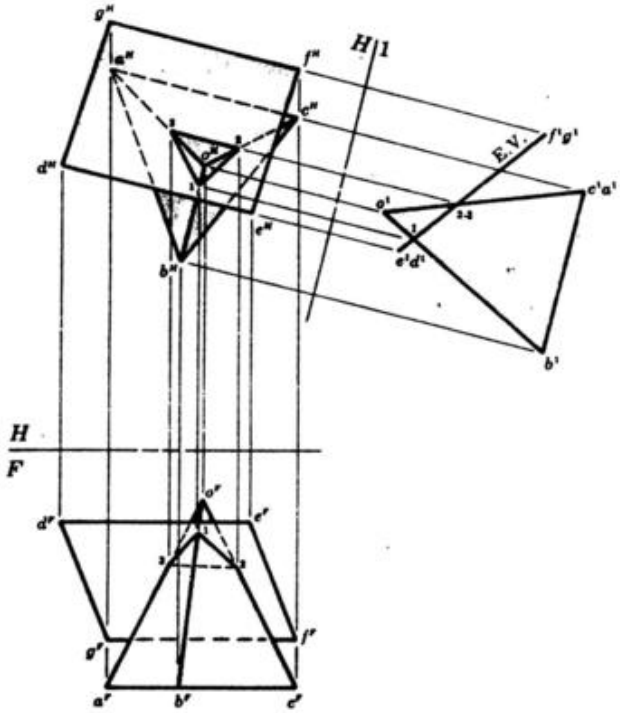


Fig. 8-28

Solución:

Utilizando los datos, dibuje una parte de las vistas de planta y frontal de la línea y del cilindro. Pase un plano paralelo al eje del cilindro, que contenga a la línea XY. El plano cortante cortará la base superior del cilindro en los puntos 1 y 2, en la vista de planta. Estos dos puntos determinan los extremos superiores de los dos elementos del cilindro que pertenecen al plano cortante. Dibuje ambos elementos, 1 y 2, paralelos al eje, en ambas vistas. Las intersecciones de los elementos 1 y 2 con la línea XY son los puntos de penetración que se piden: P_1 y P_2. Estos puntos de penetración se pueden verificar por simple proyección entre las vistas.

2. **Dado:** Una pirámide triangular recta (base ABC, vértice O) y un plano $DEFG$. $A(1\frac{1}{2}, 2, 8\frac{1}{2})$, $B(2\frac{1}{4}, 2, 6\frac{1}{2})$, $C(3\frac{1}{2}, 2, 8)$, $O(2\frac{1}{2}, 4, 7\frac{1}{2})$, $D(1, 3\frac{3}{4}, 7\frac{1}{2})$, $E(3, 3\frac{3}{4}, 7)$, $F(3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2})$, $G(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 9)$. Remítase a la Fig. 8-29. Ver en el Art. 1.7 la presentación de problemas por medio de coordenadas.

Problema: Encuentre la intersección del plano y la pirámide. Muestre la visibilidad completa.

Solución:

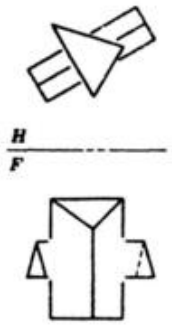
Construya la vista de planta y la vista de elevación frontal del plano y de la pirámide. Dibuje una vista auxiliar 1 para mostrar la pirámide y la vista de filo del plano. Las intersecciones del plano con las aristas OA, OB y OC de la pirámide, llámelas 1, 2 y 3, respectivamente. Proyecte los puntos de intersección a la vista de planta y a la vista de elevación frontal. Por medio de una cuidadosa visualización se determinará la visibilidad correcta.

3. **Dado:** Parte de las vistas de planta y frontal de dos prismas triangulares que se cortan. Ver la Fig. 8-30. Escala: $\frac{1}{2}'' = 1''$.

Problema: Determine la línea de intersección de los dos prismas.

Solución:

En la vista de planta prolongue las tres aristas del prisma horizontal hasta que corten las aristas del prisma vertical. Designe los puntos como se indica en la vista de planta: 1 a 6 y A, B y C. Proyecte estos puntos a la vista de elevación frontal y designelos también en esta vista. Pase un plano cortante vertical que coincida con la arista del prisma vertical, donde están localizados los puntos C, 6 y B. Llame X la intersección del plano con el lomo superior del prisma horizontal. Proyecte el punto X a su correspondiente posición en la vista de elevación frontal. Trace una línea desde el punto X hasta el punto 6, en la vista frontal. La intersección de esta línea con la arista vertical, sobre la cual está localizado el punto B, determinará el punto 7, que es el punto de intersección pedido, común a ambos planos. Designe el punto 7 en la vista de planta. Con una cuidadosa visualización se determinará la visibilidad correcta.



Dado

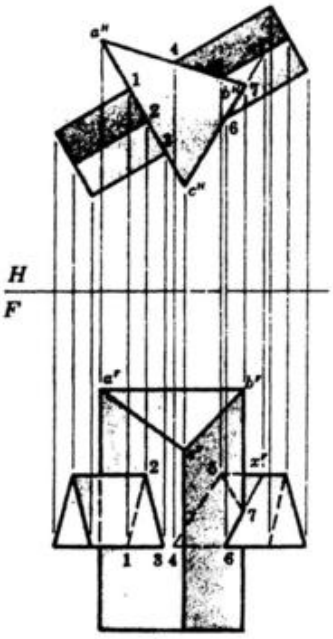


Fig. 8-30

4. **Dado:** Parte de las vistas de planta y frontal de un prisma y una pirámide que se cortan. Ver la Fig. 8-31. Escala: $\frac{1}{2}'' = 1''$.

Problema: Determine la línea de intersección del prisma y la pirámide.

Solución:

Dibuje las vistas dadas. Designe la base de la pirámide $ABCD$, y el vértice, O, como se muestra. En la vista de planta prolongue las aristas de la pirámide hasta que corten el prisma vertical. Designe estos puntos de intersección con los números 1 hasta 4 y proyéctelos a la vista frontal. Designe los puntos de intersección E, F y G en la vista de planta. Para localizar los puntos E, F y G en la vista frontal asuma planos cortantes vertica-

les que pasen por la vista de planta de estos puntos. Proyecte las intersecciones de los planos cortantes con las aristas de la pirámide a la vista frontal. Las intersecciones de los planos cortantes con las aristas de la pirámide, *OA*, *OB* y *OD* limitarán las aristas verticales del prisma hasta los puntos *E*, *F* y *G*, en la vista frontal. Por medio de una cuidadosa visualización se determinará la visibilidad correcta.

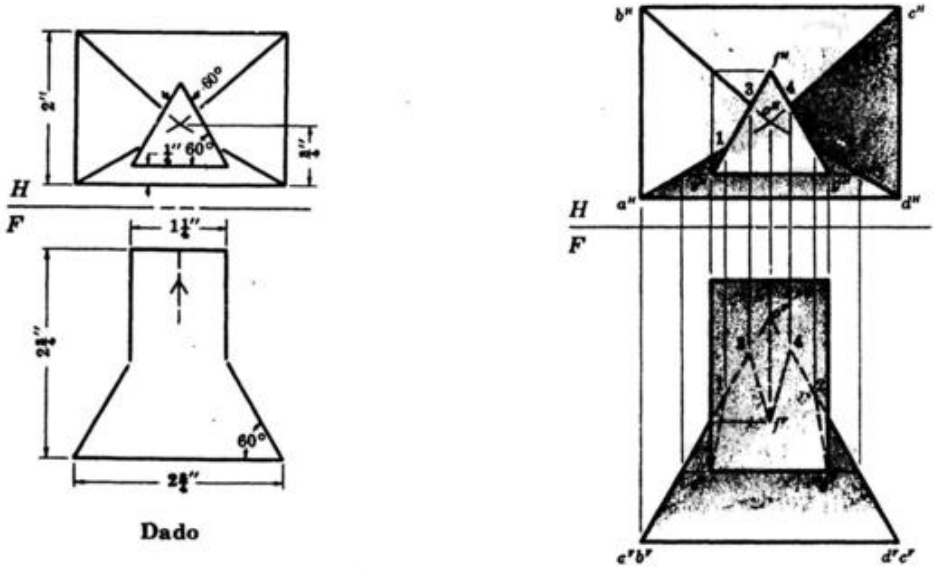


Fig. 8-31

5. **Dado:** Parte de las vistas de planta y frontal de una pirámide oblicua y un prisma. Ver la Fig. 8-32. Escala: $\frac{1}{2}'' = 1''$.
Problema: Determine la línea de intersección de los dos sólidos.

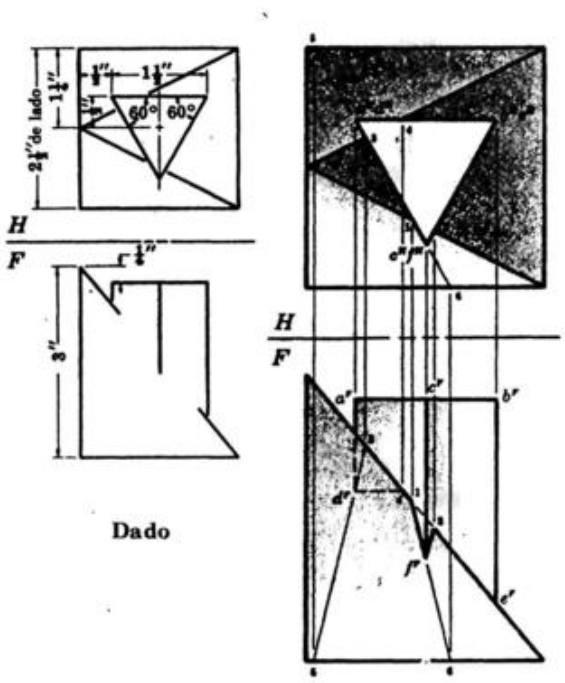


Fig. 8-32

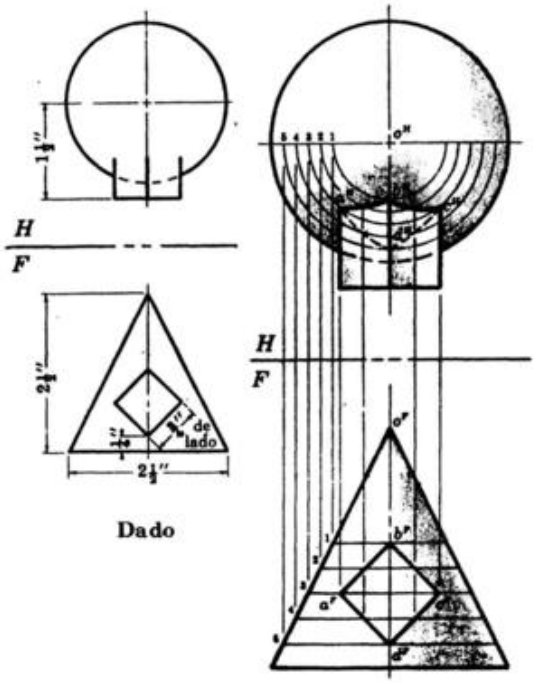


Fig. 8-33

Solución:

Dibuje las dos vistas dadas. Designe las aristas del prisma triangular vertical, *A*, *B* y *C*. En la vista de planta designe los puntos de intersección aparente con los números 1, 2, 3 y 4. Localice estos puntos, en sus correspondientes posiciones, en la vista frontal. En la vista de planta pase un plano cortante que coincida con la cara vertical *AC*. Localice los puntos 5 y 6 tanto en la vista de planta como en la vista de elevación frontal. En la vista frontal una el punto 5 con el punto 3. La intersección de esta línea con la arista vertical que pasa por *A* determinará el punto de intersección *D*. De nuevo en la vista frontal, una el punto 6 con el punto 1. La intersección de esta línea con la arista vertical que pasa por *C* determinará el punto de intersección *F*. La arista vertical que pasa por *B* cortará la cara inclinada en el punto *E*. Por medio de una cuidadosa visualización se determinará la visibilidad correcta.

6. Dado: Parte de las vistas de planta y frontal de un prisma que corta a un cono. Ver la Fig. 8-33. Escala: $\frac{1}{2}'' = 1''$.

Problema: Muestre la intersección del cono y el prisma.

Solución:

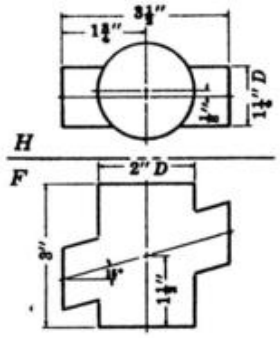
Dibuje las vistas dadas. En la vista frontal pase una serie de planos cortantes horizontales que atraviesen el cono y el prisma, como se muestra. En la vista de planta localice la intersección de los planos cortantes con las aristas del prisma prolongadas. Una cuidadosa visualización determinará la visibilidad correcta.

7. Dado: Dos cilindros que se cortan. Ver la Fig. 8-34. Escala: $\frac{1}{2}'' = 1''$.

Problema: Muestre la línea de intersección de los dos cilindros.

Solución:

Dibuje las dos vistas dadas. En la vista de planta pase una serie de planos cortantes verticales, como se muestra. Dibuje una sección transversal del cilindro inclinado. Muestre los planos cortantes en esta vista. Los planos cortantes determinan puntos comunes situados sobre la línea de intersección de los cilindros, tales como *X*, *Y*, 1 y 9. Proyecte estos puntos de intersección a la vista frontal a partir de la vista de planta y de la vista inclinada de la sección transversal. Con una cuidadosa visualización se determinará la visibilidad correcta.



Dado

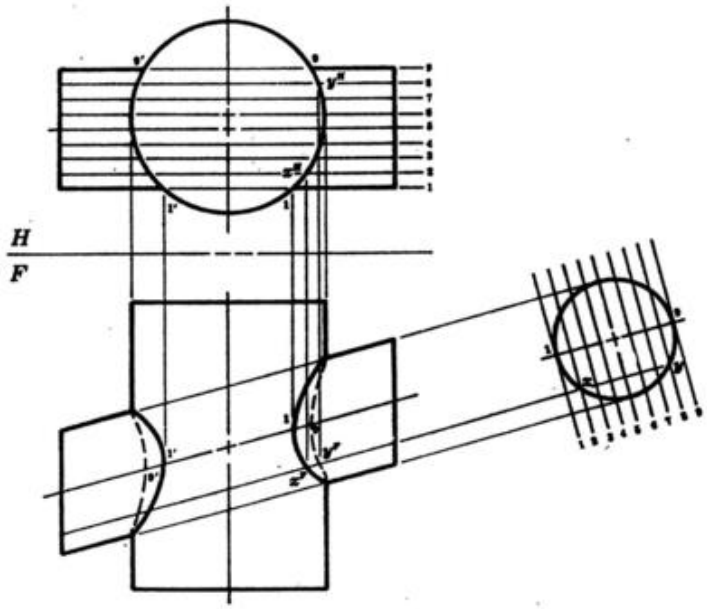


Fig. 8-34

8. Dado: Dos conos circulares rectos que tienen una altura de $2\frac{1}{2}''$ y un diámetro en la base de 2", tienen sus bases paralelas. El vértice de uno de los conos está localizado 1" al oeste y $\frac{1}{2}''$ al sur del vértice del otro cono. Ver la Fig. 8-35. Escala: $\frac{1}{2}'' = 1''$.

Problema: Determine la intersección de los dos conos.

Solución:

Utilizando los datos, dibuje una parte de las vistas de planta y frontal de los dos conos circulares rectos. En la vista de elevación frontal pase dos planos horizontales cortantes que atraviesen ambos conos. En la vista de planta muestre sobre los conos, los círculos de corte hechos por estos dos planos cortantes. Las intersecciones de los círculos correspondientes localizarán puntos comunes pertenecientes a la línea de intersección de los dos conos. Para localizar el punto más alto de intersección dibuje en la vista de planta un plano cortante vertical *AB* que pase por los vértices *X* y *Y*. La intersección de los elementos *XW* y *YV*, en la vista de elevación frontal, determina el punto de intersección más alto de los dos conos. Con una cuidadosa visualización se determinará la visibilidad correcta.

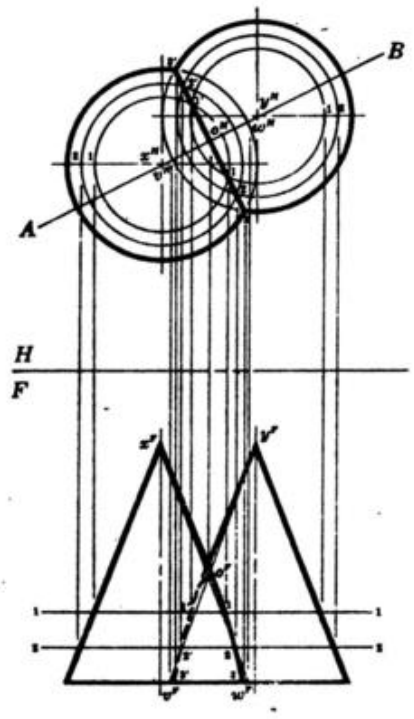


Fig. 8-35

9. Dado: La vista de planta y la vista de elevación frontal de un cilindro oblicuo que representa un tubo de calefacción que pasa por la esquina de un salón de una fábrica. Remítase a la Fig. 8-36. Escala: $\frac{1}{2}'' = 1''$.

Problema: Haga medio desarrollo del asbesto que se necesita para recubrir completamente el tubo.

Solución:

Construya la vista de planta y la vista de elevación frontal del tubo dado. Puesto que el eje del cilindro es una línea frontal, todos los elementos del cilindro aparecerán en sus verdaderas longitudes en la vista frontal. Dibuje una parte de la vista de sección transversal del cilindro y divida esta semielipse en un número conveniente de elementos, en este caso 7. Proyecte estos elementos a la vista frontal, donde aparecerán en sus verdaderas longitudes. Los elementos se pueden mostrar también en la vista de planta, paralelos al eje. Trace una línea de desarrollo correspondiente al plano de la parte de la sección transversal mencionada y traslade las distancias entre los elementos desde la vista que muestra la mitad de la sección transversal. La longitud verdadera de cada elemento se trasladará desde la vista frontal. Para lograr una curva suave, una los extremos de los elementos, como se muestra, utilizando un curvígrafo.

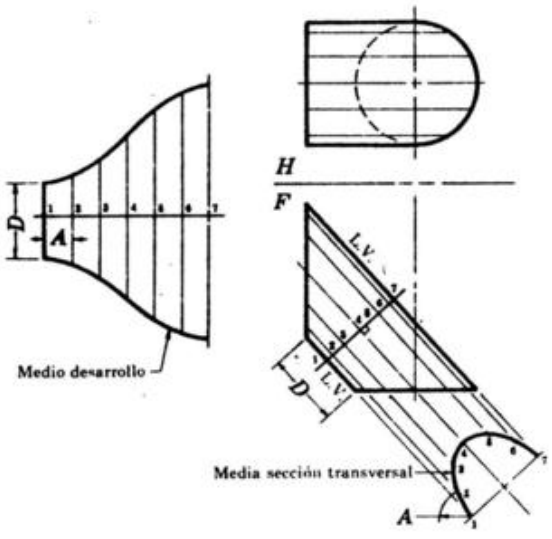


Fig. 8-36

10. Dado: La vista de planta y la vista de elevación frontal de una pirámide recta truncada que se muestra en la Fig. 8-37. Escala: $\frac{1}{2}'' = 1''$

Problema: Desarrolle la superficie lateral de la pirámide.

Solución:

Construya las vistas dadas. Puesto que la pirámide es recta y está truncada horizontalmente, todas las aristas laterales tendrán la misma longitud. En la vista de planta gire la arista OC para obtener su longitud verdadera en la vista de elevación frontal. La longitud verdadera de la arista CG puede ser medida ahora en la vista frontal. Las longitudes verdaderas de todas las aristas horizontales se miden en la vista de planta. Trace un arco cuyo radio sea igual a la longitud verdadera de OC. Trace una línea desde O hasta C y tome la longitud verdadera de CG. Con centro en C, sobre el desarrollo, trace un arco con radio igual a la longitud verdadera de CD, obtenida en la vista de planta. La intersección de este arco con el arco base localizará el punto D en el desarrollo. Una el punto D con el punto O y tome la longitud verdadera de DH, que es igual a la de CG. Continúe este procedimiento hasta completar el desarrollo. Un arco con centro en O y radio igual a OG simplificará la localización de los puntos H, E y F en el desarrollo.

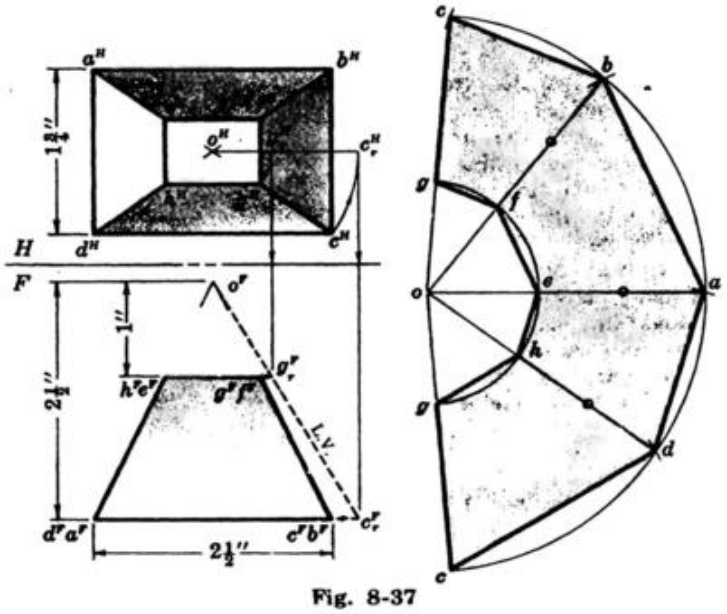


Fig. 8-37

11. Dado: La vista de planta y la vista de elevación frontal de una pirámide truncada. Ver la Fig. 8-38. Escala: $\frac{1}{2}'' = 1''$.

Problema: Desarrolle la superficie lateral de la pirámide.

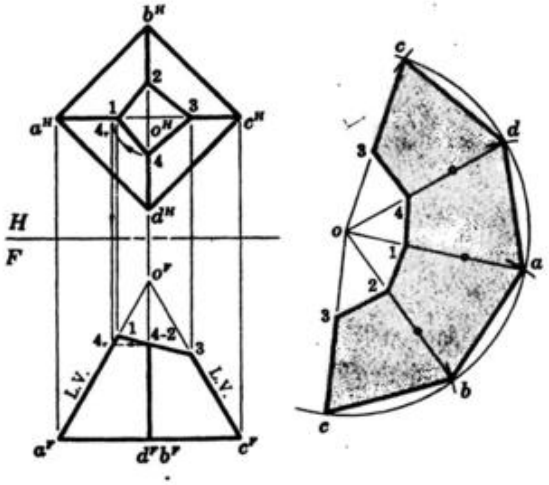


Fig. 8-38

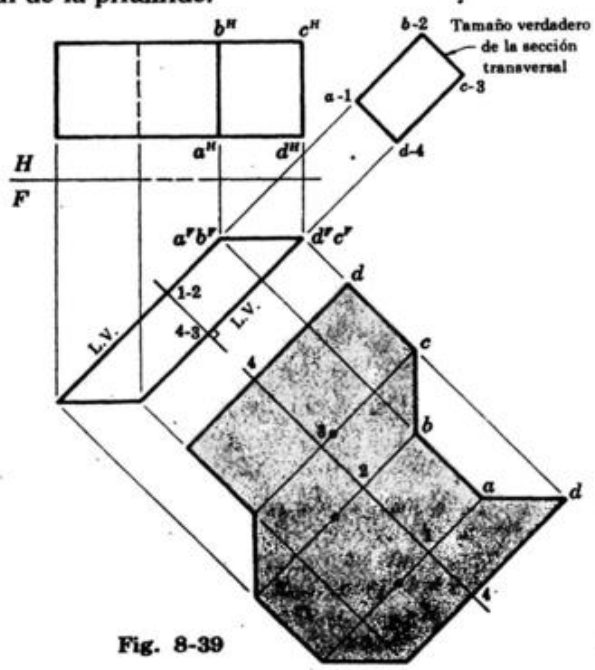


Fig. 8-39

Solución:

Construya la vista de planta y la vista de elevación frontal, como se muestra. Designe las aristas laterales, como se muestra. Las aristas *A*-1 y *C*-3 aparecen en verdadera longitud en la vista frontal. Para obtener la longitud verdadera de las aristas *B*-2 y *D*-4, gire el punto 4 hasta situarlo en un plano frontal y mida *A*-4 girado, en la vista frontal. Puesto que el tamaño verdadero de la base se ve en la vista de planta y las longitudes verdaderas de las aristas laterales aparecen en la vista frontal, el desarrollo se construye utilizando como vértice-centro el punto *O*, a partir del cual se trazan las longitudes verdaderas de las aristas. Observe el desarrollo en la figura.

12. Dado: La vista de planta y la vista de elevación frontal del prisma mostrado en la Fig. 8-39. Escala: $\frac{1}{2}'' = 1''$.

Problema: Dibuje el desarrollo del prisma.

Solución:

Dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal que se dan. Designe las aristas, como se muestra. Construya una vista que muestre la sección transversal en su verdadero tamaño. Esta vista de la sección transversal mostrará las posiciones relativas correctas de las aristas laterales del prisma. Trace una línea de desarrollo correspondiente al plano de la sección transversal, en la vista frontal. Proyecte las longitudes verdaderas de los elementos desde la vista frontal y las distancias entre los elementos desde la vista que muestra el tamaño verdadero de la sección transversal. Doble por las líneas indicadas.

13. Dado: Un cono oblicuo cuya base horizontal tiene un diámetro de $1\frac{3}{4}''$. El vértice está localizado $2''$ exactamente al este del centro de la base y $2\frac{1}{4}''$ por encima de la base. El cono debe ser truncado por un plano horizontal situado $1\frac{1}{4}''$ por encima de la base. Ver la Fig. 8-40. Escala: $\frac{1}{2}'' = 1''$.

Problema: Haga medio desarrollo del cono oblicuo truncado.

Solución:

Utilizando los datos, construya la vista de planta y la vista de elevación frontal del cono oblicuo truncado. En la vista de planta divida la base circular en 12 partes iguales y muestre los 12 elementos desde la base hasta el vértice del cono. Construya un diagrama de longitudes verdaderas (ver el Art. 8.16) para determinar la longitud verdadera de cada elemento. Con las distancias entre los elementos y sus longitudes verdaderas conocidas se puede hacer el desarrollo por el método de la Fig. 8-25.

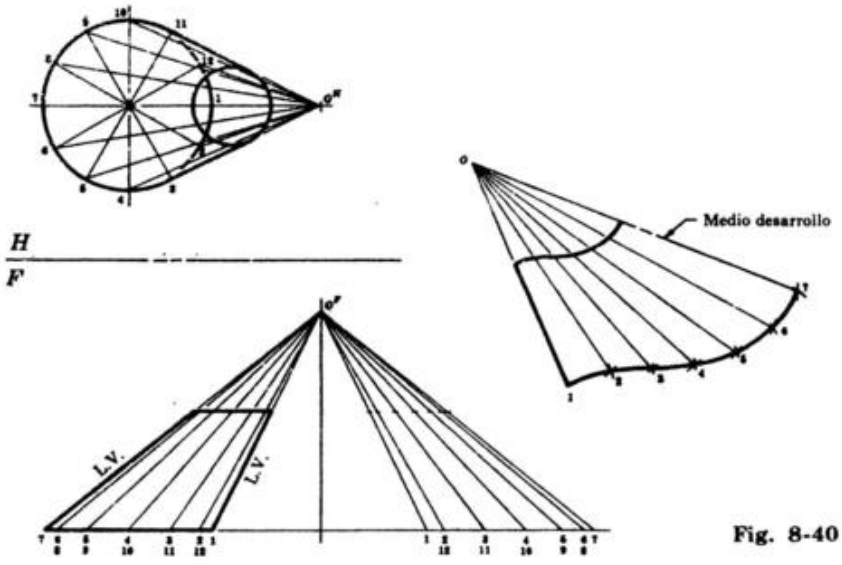


Fig. 8-40

Diagrama de longitudes verdaderas

14. Dado: La vista de planta y la vista de elevación frontal de un adaptador. Ver la Fig. 8-41. Escala: $\frac{1}{2}'' = 1''$.

Problema: Usando el método de triangulación, dibuje el desarrollo completo del adaptador.

Solución:

Designe cada uno de los ocho puntos, como se muestra, y trace una diagonal sobre cada una de las cuatro caras. A la derecha de la vista frontal trace la línea XY de longitud igual a la altura del adaptador. A partir del punto Y (y hacia la izquierda de él) tome las longitudes, medidas en la vista de planta, de las líneas de doblez, tales como A-E, B-F, etc. Una estos puntos con el punto X en el diagrama de longitudes verdaderas para obtener las longitudes verdaderas de las líneas de doblez. Hacia la derecha del punto Y tome las longitudes de las diagonales, medidas en la vista de planta, tales como A-F, F-C, etc. Una estos puntos con el punto X en el diagrama de longitudes verdaderas, para obtener las longitudes verdaderas de las diagonales. Asuma que A-E es la línea de costura y trace A-E para empezar el desarrollo. Con centro en E trace un arco cuyo radio sea igual a la longitud verdadera de E-F, mostrada en la vista de planta. Con centro en A trace un arco con radio igual a la longitud verdadera de la diagonal A-F, obtenida en el diagrama de longitudes verdaderas. La intersección de estos dos arcos determinará el punto F en el desarrollo. Continúe este procedimiento hasta completar el desarrollo. Las longitudes verdaderas de las aristas de las bocas superior e inferior del adaptador se obtendrán trasladando directamente las distancias desde la vista de planta. Las longitudes verdaderas de las líneas de doblez y de las diagonales se miden en el diagrama de longitudes verdaderas, y estas distancias se trasladan al desarrollo.

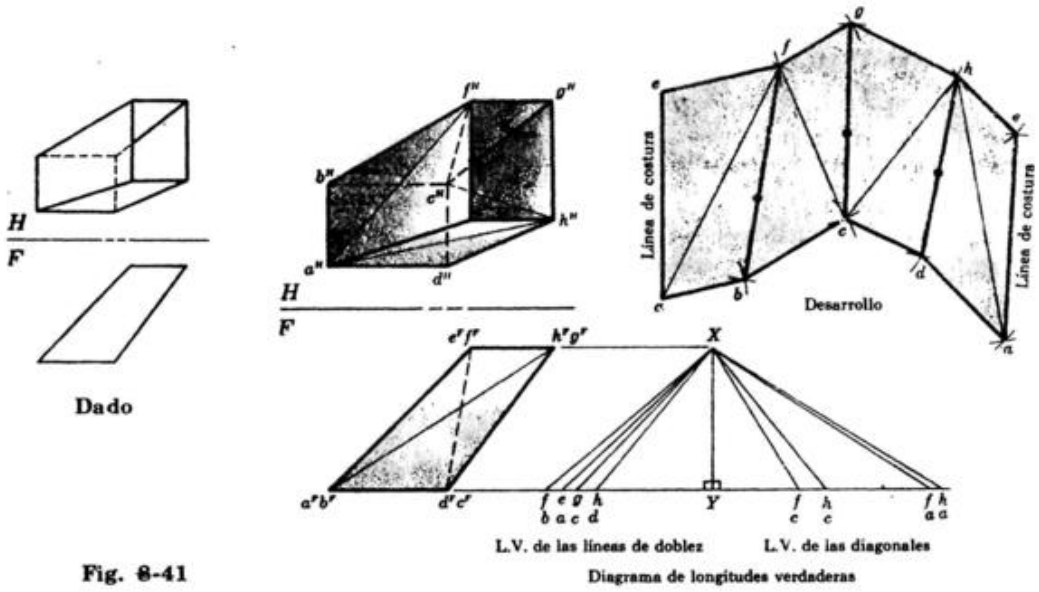


Fig. 8-41

15. Dado: Parte de las vistas de planta y frontal de un adaptador que se muestra en la Fig. 8-42. Escala: $\frac{1}{2}'' = 1''$.

Problema: Dibuje medio desarrollo del adaptador, utilizando los principios de la triangulación.

Solución:

Designe los puntos, como se muestra, y dibuje las líneas de doblez principales, A-E, B-E, etc., en ambas vistas. Divida el semicírculo en 6 partes iguales y una estos puntos con las esquinas de la base del adaptador, C y D. A la derecha de la vista de elevación frontal trace la línea XY con una longitud igual a la altura del adaptador. A partir del punto X tome la longitud, medida en la vista de planta, de cada una de las líneas de doblez, tales como D-1, D-2, D-3, etc. Una estos puntos con Y para obtener las longitudes verdaderas de estas líneas de doblez. Asumiendo que el desarrollo se ha de hacer en dos partes, las líneas de costura serán G-1 y F-7.

Comience el desarrollo trazando una línea cuya longitud sea igual a la longitud verdadera de C-D, mostrada en la vista de planta. Con centro en el punto C trace un arco con radio igual a la longitud verdadera de C-4, obtenida en el diagrama de longitudes verdaderas. Con centro en el punto D trace un arco cuyo radio sea igual a la longitud verdadera de D-4, obtenida en el diagrama de longitudes verdaderas. La intersección de estos dos arcos localizará el punto 4 en el desarrollo. Con centro en C trace arcos con radios iguales a las longitudes verdaderas de C-5, C-6 y C-7. Con centro en D trace arcos con radios iguales a las longitudes verdaderas de D-1, D-2 y D-3. Comenzando en el punto 4, trace arcos en direcciones opuestas que tengan como radio la longitud de la cuerda subtendida entre dos puntos sucesivos situados sobre la circunferencia, en la vista de planta.

Las intersecciones de estos arcos con los arcos trazados anteriormente con centros en *C* y *D*, determinarán los puntos 1 a 7 en el desarrollo. Con centros en los puntos *C* y *D* trace dos arcos que tengan sus radios iguales a las distancias, medidas en la vista de planta, de *C-F* y *D-G*, respectivamente. Trace un arco con centro en el punto 7 cuyo radio sea igual a la altura vertical del adaptador. La intersección de este arco con el arco cuyo centro está en *C*, trazado anteriormente, determinará el punto *F* en el desarrollo. Trace un arco con centro en el punto 1 cuyo radio sea igual a la longitud verdadera de *G*-1, obtenida en el diagrama de longitudes verdaderas. La intersección de este arco con el arco de centro en *C* trazado anteriormente, localizará el punto *G* en el desarrollo. Una los puntos, como se muestra.

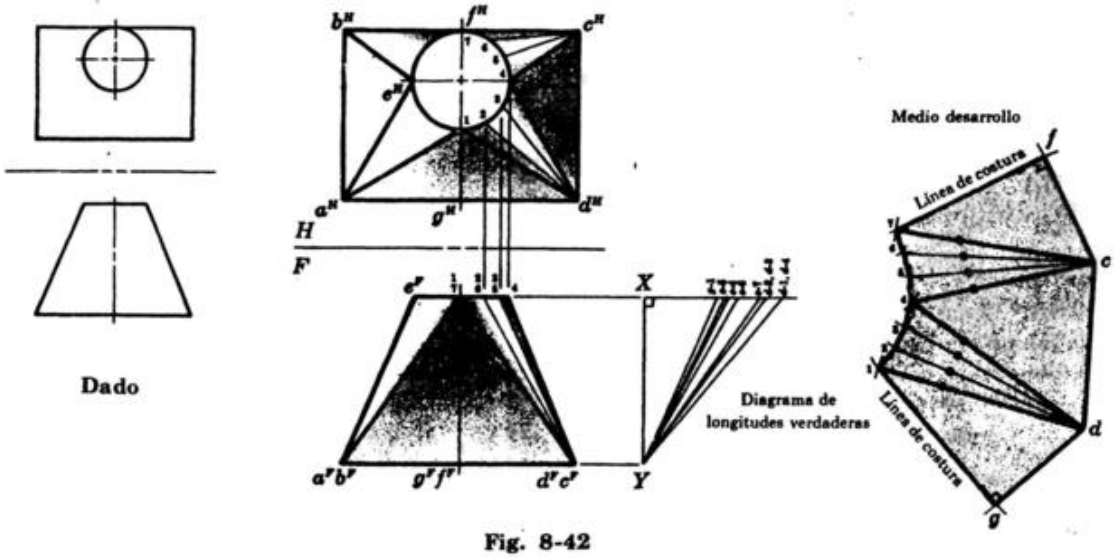


Fig. 8-42

Problemas propuestos

16. La Fig. 8-43 muestra parte de las vistas de planta y frontal de dos prismas que se cortan. Muestre la intersección de los dos prismas. Escala: 12" = 1'—0".

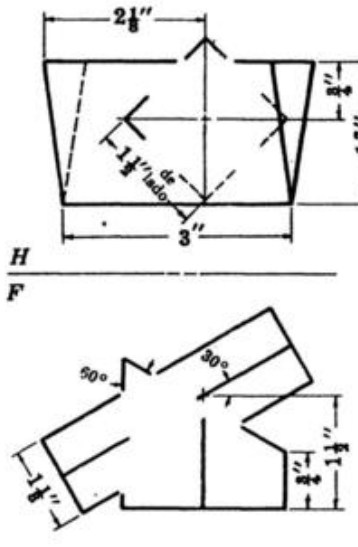


Fig. 8-43

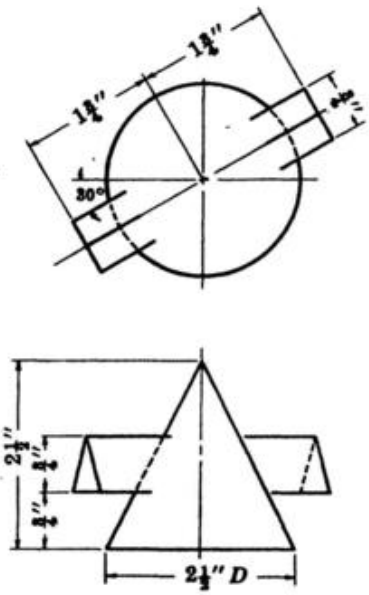


Fig. 8-44

17. Determine la línea de intersección del cono circular recto y el prisma triangular que se muestran en la Fig. 8-44. Escala: 12" = 1'—0".

18. Muestre la intersección de un tubo cilíndrico con uno semicilíndrico, mostrados en la Fig. 8-45. Escala: 12" = 1'—0".

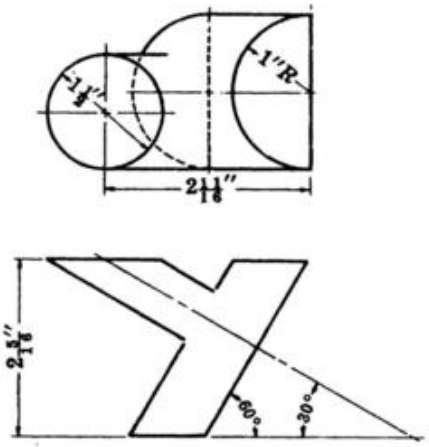


Fig. 8-45

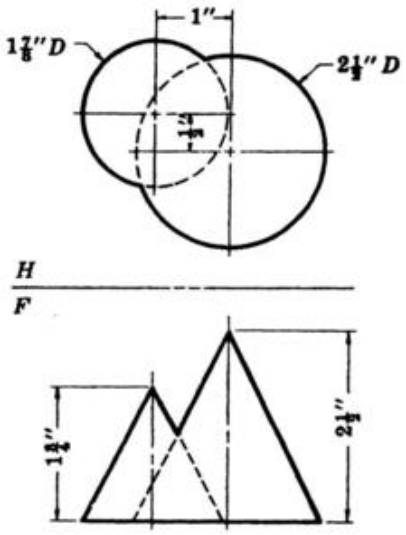


Fig. 8-46

19. La Fig. 8-46 muestra parte de las vistas de planta y frontal de dos conos circulares rectos que se cortan. Determine la línea de intersección de los conos. Desarrolle el cono mayor. Escala: 12" = 1'—0".

20. Construya las vistas dadas y desarrolle la superficie lateral de cada uno de los prismas mostrados en la Fig. 8-47. Utilice las escalas más convenientes.

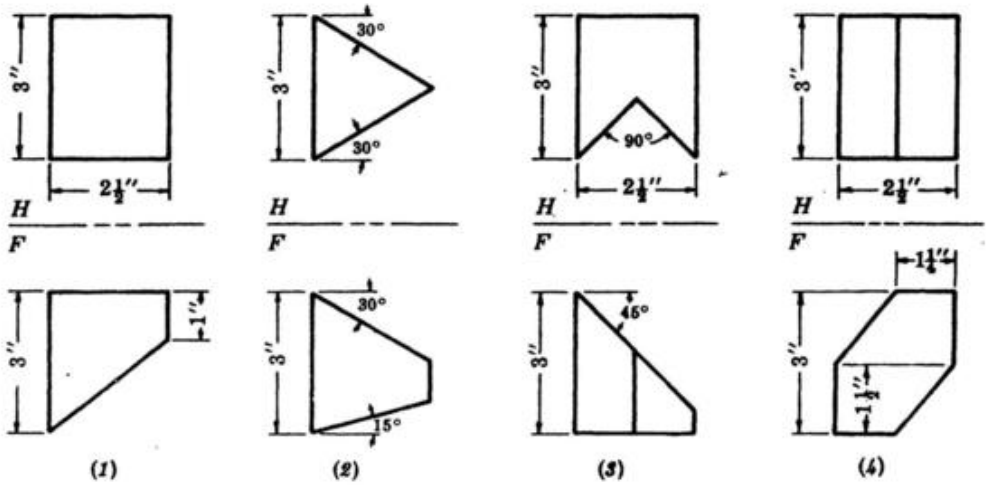


Fig. 8-47

21. La Fig. 8-48 muestra la vista de planta y la vista de elevación frontal de una pirámide recta truncada. Haga el desarrollo completo de la pirámide. La pirámide es un adaptador. Escala: 12" = 1'—0".

22. Construya las vistas dadas y haga el desarrollo de las caras laterales de la pirámide oblicua. Remítase a la Fig. 8-49. Escala: 12" = 1'—0".

23. La Fig. 8-50 muestra la vista de planta y la vista de elevación frontal de un cilindro hueco. Haga medio desarrollo del cilindro. Escala: 12" = 1'—0".

24. La Fig. 8-51 muestra la vista de planta y la vista de elevación frontal de un trozo de manguera en forma de cilindro recto truncado. Haga medio desarrollo del cilindro, partiendo directamente de la vista de elevación frontal. Escala: 12" = 1'—0".

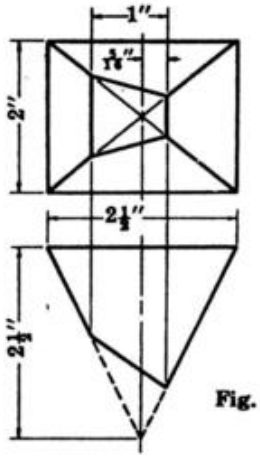


Fig. 8-48

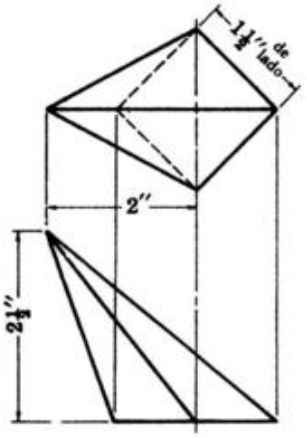


Fig. 8-49

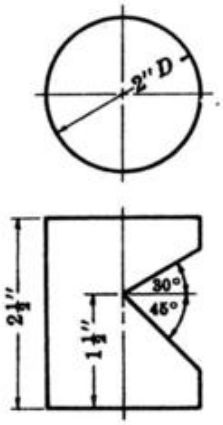


Fig. 8-50

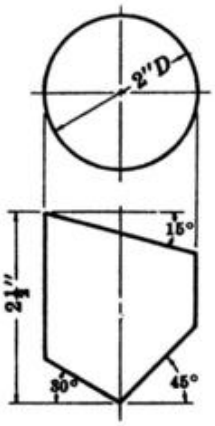


Fig. 8-51

25. La Fig. 8-52 muestra un cilindro sólido. Construya las vistas dadas y desarrolle la superficie lateral del cilindro. Use la escala que más convenga.

26. Haga medio desarrollo del cilindro hueco truncado que se muestra en la Fig. 8-53. Escala: 12" = 1'—0".

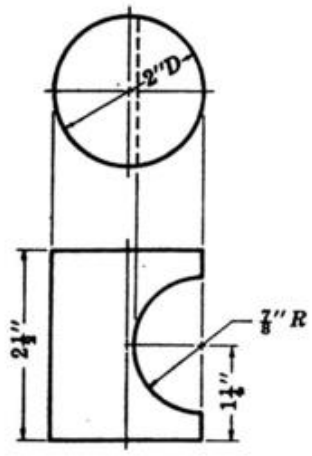


Fig. 8-52

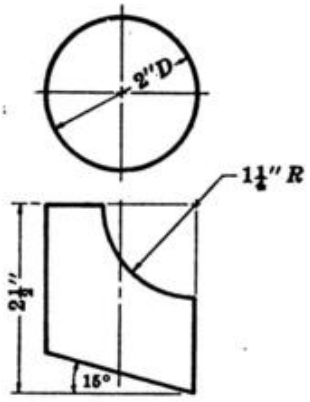


Fig. 8-53

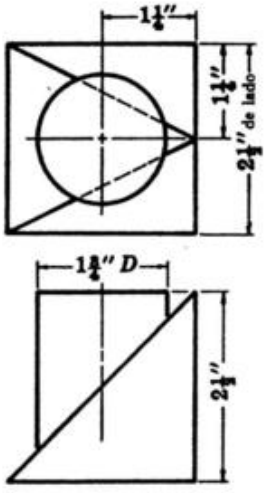


Fig. 8-54

27. La Fig. 8-54 muestra un cilindro que corta a una pirámide oblicua. Determine la línea de intersección y el desarrollo del cilindro. Escala: 12" = 1'—0".

28. La Fig. 8-55 muestra parte de las vistas de planta y frontal de un cilindro horizontal y de un prisma vertical. Determine la intersección del cilindro y el prisma. Haga el desarrollo de cada sólido. Escala: 12" = 1'—0".

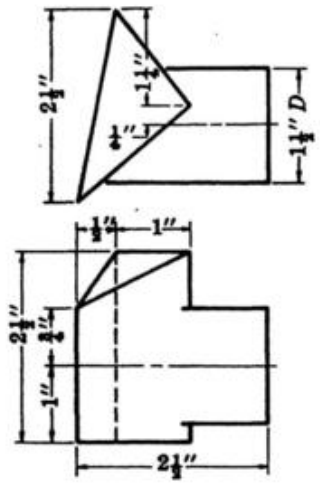


Fig. 8-55

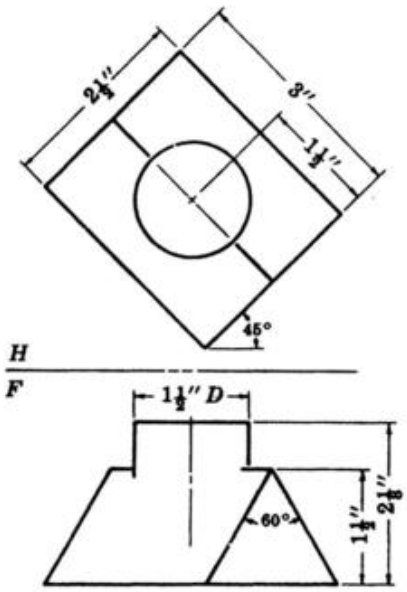


Fig. 8-56

29. La Fig. 8-56 muestra parte de las vistas de planta y frontal de un cilindro y un prisma. Muestre la intersección del cilindro y el prisma. Haga medio desarrollo del cilindro. Escala: 12" = 1'—0".

30. Muestre la intersección de los dos cilindros circulares mostrados en la Fig. 8-57. Dibuje el desarrollo de cada cilindro. Escala: 12" = 1'—0".

31. La Fig. 8-58 muestra parte de las vistas de planta y frontal de dos cilindros circulares que se cortan. Determine la intersección de los dos cilindros y haga medio desarrollo de cada cilindro. Escala: 12" = 1'—0".

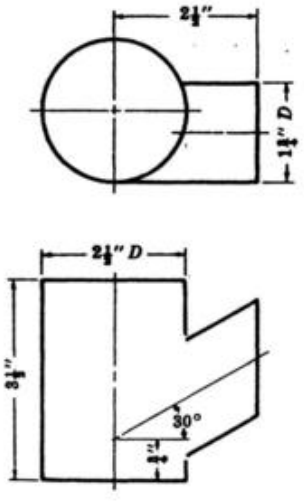


Fig. 8-57

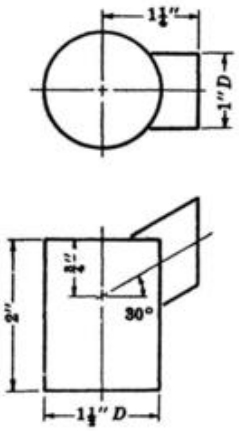


Fig. 8-58

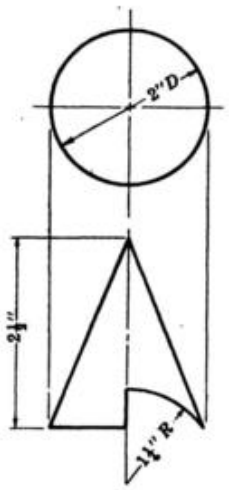


Fig. 8-59

32. Complete la vista de planta y desarrolle el cono circular recto hueco que se muestra en la Fig. 8-59. Escala: 12" = 1'—0".

33. Construya las vistas dadas y haga medio desarrollo de la superficie lateral del cono oblicuo que se muestra en la Fig. 8-60. Escala: 12" = 1'—0".

34. La Fig. 8-61 muestra la vista frontal y parte de la vista de planta de un cono circular recto cortado por un prisma triangular. Determine la intersección del prisma y el cono. Haga los desarrollos completos del prisma y del cono. Escala: 12" = 1'—0".

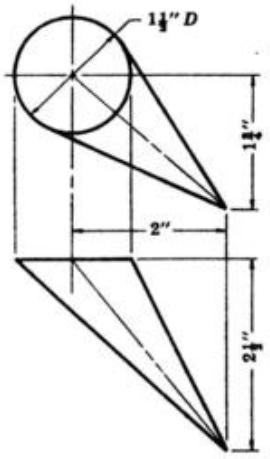


Fig. 8-60

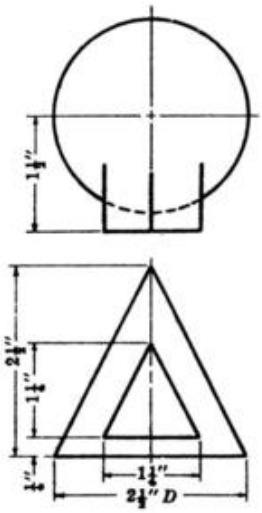


Fig. 8-61

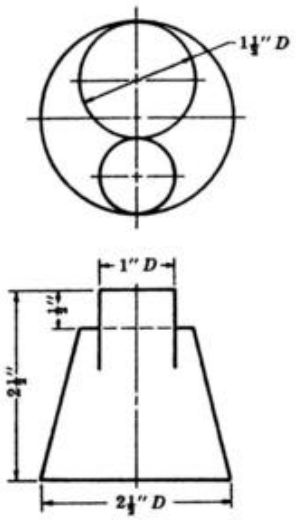


Fig. 8-62

35. La Fig. 8-62 muestra la vista de planta y parte de la vista frontal de un cono truncado, cortado por un cilindro. Determine la intersección del cono y el cilindro. Haga el desarrollo de ambos cuerpos. Escala: 12" = 1'—0".

36. La Fig. 8-63 muestra la vista de planta y la vista frontal de un adaptador de cuadrado a rectángulo. Por medio de triangulación dibuje medio desarrollo. Escala: 12" = 1'—0".

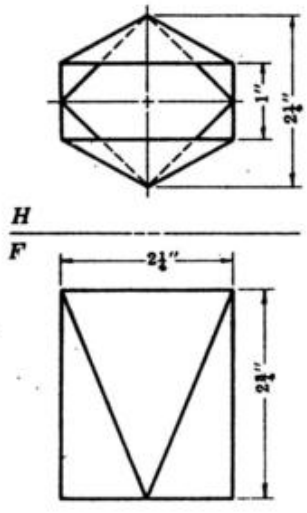


Fig. 8-63

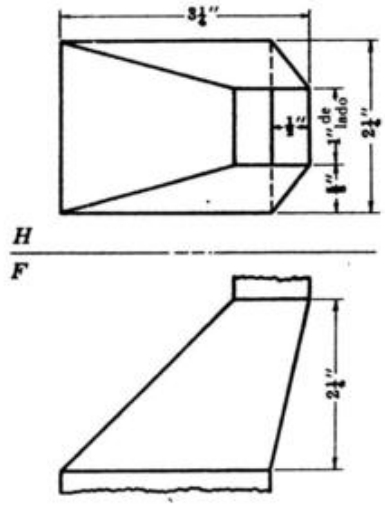


Fig. 8-64

37. La Fig. 8-64 muestra la vista de planta y la vista de elevación frontal de un adaptador de cuadrado a rectángulo. Dibuje medio desarrollo, usando el método de triangulación. Escala: 12" = 1'—0".

38. La Fig. 8-65 muestra la vista de planta y la vista de elevación frontal de un adaptador de círculo a rectángulo. Haga el desarrollo completo del adaptador, utilizando el método de triangulación. Escala: 12" = 1'—0".

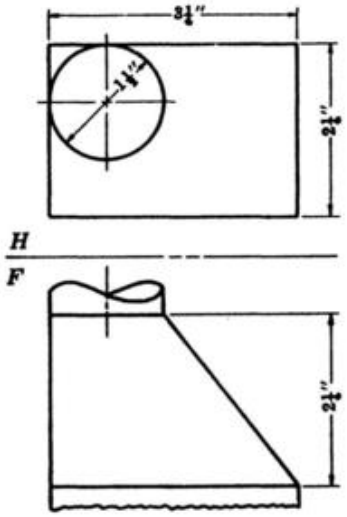


Fig. 8-65

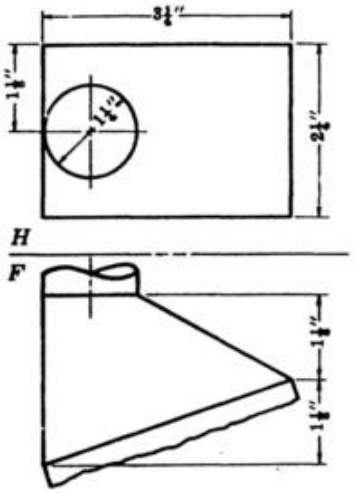


Fig. 8-66

39. La Fig. 8-66 muestra la vista de planta y la vista de elevación frontal de un adaptador de círculo a rectángulo. Por medio de triangulación dibuje medio desarrollo. Escala: 12" = 1'—0".

Capítulo 9

Problemas de minería y topografía

Las relaciones básicas de puntos, líneas y planos que se han explicado hasta ahora tienen su aplicación práctica en los problemas fundamentales encontrados por los estudiantes en la ingeniería de minas y en los trabajos topográficos. Para estos estudiantes existen varios textos que abarcan adecuadamente la mayoría de los problemas involucrados en estos campos de estudio. El propósito de este breve capítulo es simplemente familiarizar al estudiante de ingeniería o de ciencias con las relaciones elementales de la geometría descriptiva, aplicadas a la minería y a la topografía.

Antes de que el estudiante intente resolver problemas de minería, debe comprender el significado de los términos utilizados en operaciones de minería. Los siguientes términos y sus significados son esenciales para lograr un claro entendimiento de los problemas básicos de minería (Ver la Fig. 9-1).

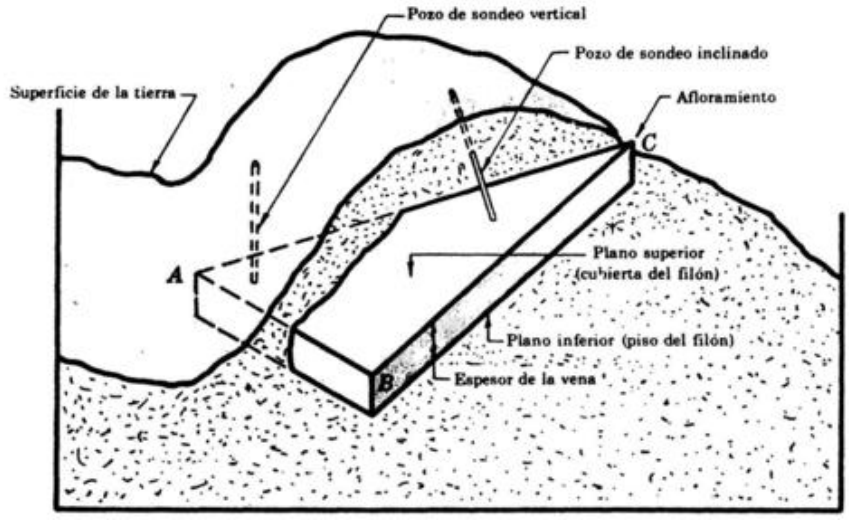


Fig. 9-1. Porción de un estrato

9.1 DEFINICIONES

(*1*) *Estrato* — una capa, vena o filón de mineral, considerado generalmente como un plano inclinado de espesor uniforme. El *espesor* del estrato es la distancia entre sus superficies paralelas.

(2) *Cubierta del filón* — el plano de estratificación superior o superficie superior del estrato.

(*3*) *Piso del filón* — el plano de estratificación inferior o superficie inferior del estrato.

(*4*) *Pozo de sondeo* — el agujero taladrado desde la superficie de la tierra hasta el estrato, para determinar la posición de éste.

(5) *Afloramiento* — la localización de la intersección del estrato con la superficie de la tierra.

(6) *Rumbo del estrato* — el rumbo de una línea horizontal situado sobre el plano del estrato.

(7) *Buzamiento* — el ángulo real de pendiente del estrato, medido en ángulo recto con el rumbo y descendente desde un plano horizontal.

(8) *Pozo de extracción* — pozo generalmente vertical que se abre desde la superficie de la tierra hasta el sitio de actividad de la mina.

(9) *Túnel* — una galería subterránea, horizontal o inclinada, que parte del pozo de extracción del estrato.

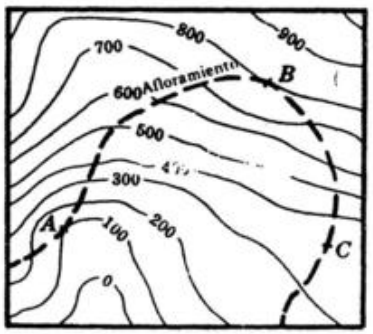
Nota: Hay algunos otros términos que se usan necesariamente en minería, pero los que enumeramos anteriormente son suficientes para abarcar los problemas básicos tratados en este capítulo.

9.2 DETERMINAR EL RUMBO Y EL BUZAMIENTO DE UN MAPA DADO

Análisis: Se dan datos suficientes para localizar los puntos sobre el estrato. Localice una línea horizontal sobre el plano y muestre su rumbo en la vista de planta. Puesto que el buzamiento es el mismo ángulo de pendiente, cualquier vista de elevación que muestre el plano como un filo mostrará también el buzamiento de la vena.

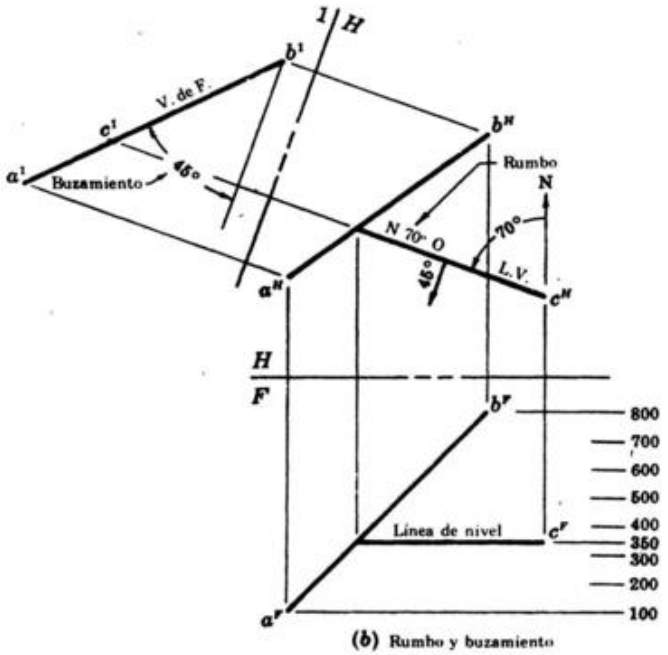
Ejemplo: El mapa dado se muestra en la Fig. 9-2(*a*). La elevación del punto *C* es 350'. Este dato se traslada a las vistas de planta y frontal de la Fig. 9-2(*b*). Se traza una línea horizontal desde el punto *C* en la vista frontal. La longitud verdadera de esta línea, mostrada en la vista de planta, determinará el rumbo del plano, que es N 70°O.

La vista de elevación auxiliar 1 muestra el plano de la vena como un filo, y el ángulo de pendiente de 45° es el buzamiento del estrato. El buzamiento de un estrato se representa generalmente sobre un mapa, trazando una línea corta que se aleje de la línea de rumbo y sea perpendicular a ella. Esta línea de buzamiento debe apuntar hacia la parte más baja del plano. El buzamiento o ángulo de pendiente de 45° se muestra colocando el valor del ángulo al lado de la línea de buzamiento. Este buzamiento se describe verbalmente como 45° SO. Un estrato que tenga un buzamiento de 45° SO es completamente diferente de uno que tenga un buzamiento de 45° NE aunque el rumbo en ambos casos es el mismo.



Los puntos *A*, *B* y *C* son puntos de afloramiento pertenecientes al plano superior de un estrato.

(*a*) Mapa dado



(*b*) Rumbo y buzamiento

Fig. 9-2. Determinación del rumbo y el buzamiento de un estrato

9.3 DETERMINAR EL RUMBO, BUZAMIENTO, AFLORAMIENTO Y ESPESOR DE UNA VENA

Análisis: Tres puntos determinan un plano. Una línea horizontal, mostrada en la vista de planta, determinará el rumbo de la vena. El buzamiento, siendo el mismo ángulo de pendiente, se medirá en una vista de elevación que muestre el plano como un filo. Un punto situado sobre el piso del filón se localiza por medio de un pozo de sondeo vertical que corte la superficie inferior del estrato. Asumiendo que la vena de mineral es de espesor uniforme y, por tanto, paralela, la vista de filo del piso del filón se traza paralela a la cubierta del filón o plano superior del estrato. El espesor de la vena se determina por la distancia perpendicular entre las dos superficies planas. Una vista de elevación que muestre la vena de mineral como un filo, mostrará también las líneas de nivel de la tierra como líneas horizontales rectas. Esta vista de elevación mostrará la intersección de cada una de las líneas de nivel con la vena de mineral. Proyectando estos puntos de intersección a la vista de planta, se determinará la vista de planta del afloramiento.

Ejemplo: El plano topográfico de una parte de una propiedad minera se muestra en la Fig. 9-3, con los puntos *A*, *B*, *C* y *D* dados. Los puntos *A*, *B* y *C* son tres puntos situados sobre el plano superior de la vena. *B* y *C* son puntos de afloramiento del plano superior. El punto *D* está localizado sobre el plano inferior de la vena y directamente debajo del punto *A*.

El rumbo se determina trazando una línea horizontal en la vista frontal del plano *ABC* y mostrando su rumbo en la vista de planta. Una vista de elevación auxiliar proyectada de la vista de planta y que muestre el plano como un filo, determinará el buzamiento. Asumiendo que los planos superior o inferior son paralelos, podemos trazar el plano inferior, localizando el punto *D* en la vista 1. El espesor de la vena será la distancia perpendicular entre las líneas que representan los planos de estratificación superior e inferior.

La intersección del plano *ABC* con la curva de nivel a 260' de altura, en la vista de elevación auxiliar, determina los puntos *X* y *Y*, que pertenecen tanto a la vena como a la superficie de la tierra. Estos dos puntos, *X* y *Y*, al proyectarlos a la vista de planta, determinarán dos puntos situados sobre la línea superior de afloramiento. De la misma manera se determinarán puntos adicionales situados sobre las líneas superior e inferior de afloramiento Todo el material visible está localizado entre las líneas de afloramiento, superior e inferior.

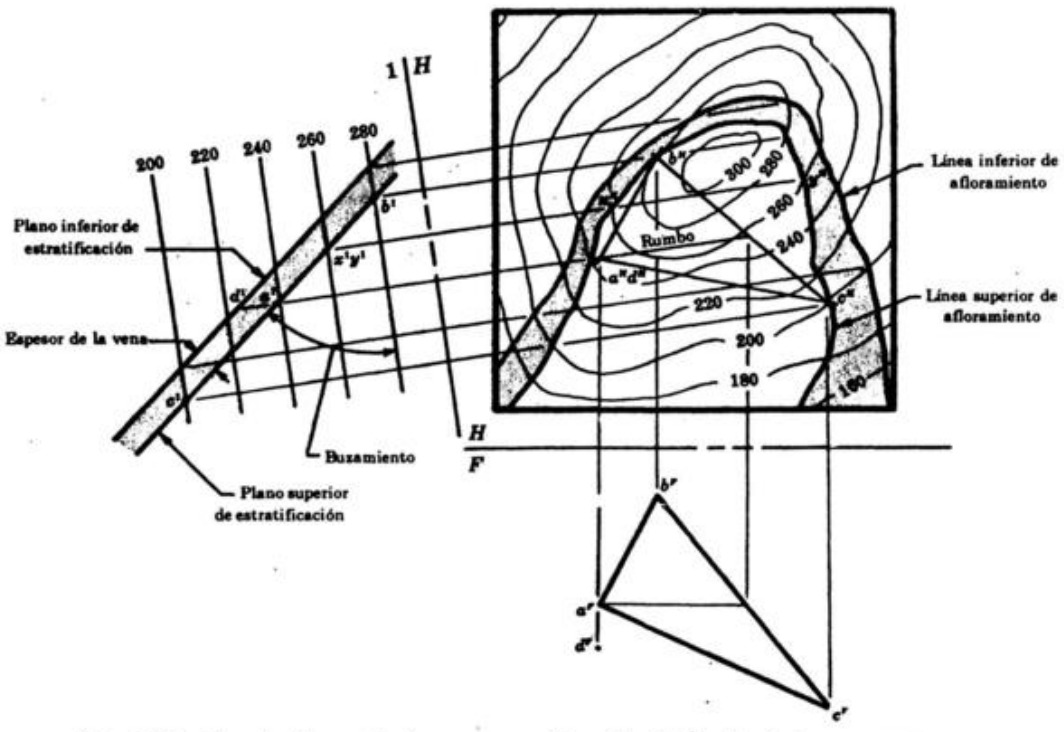


Fig. 9-3. Rumbo, buzamiento, espesor y línea de afloramiento de una vena

9.4 DETERMINAR EL RUMBO, BUZAMIENTO Y ESPESOR DE UNA VENA, UTILIZANDO DOS POZOS DE SONDEO NO PARALELOS

Análisis: Dos pozos de sondeo no paralelos cortarán la cubierta y el piso del filón en dos puntos de cada una de estas superficies.

***A.* Método lineal:** Los dos puntos situados sobre la cubierta del filón deben unirse con una línea recta. Una vista que muestre esta línea como un punto, mostrará asímismo la cubierta del filón como un filo aunque su dirección es aún desconocida. Debido a que la cubierta y el piso del filón se suponen paralelos, la vista mencionada también mostrará el piso del filón como un filo, y por tanto su posición se determinará localizando los dos puntos pertenecientes a la superficie del piso del filón. La cubierta del filón puede dibujarse ahora paralela al piso del filón, y el espesor de la vena será evidente.

La vista de planta de una línea horizontal localizada sobre la cubierta del filón determinará el rumbo de la vena. Una vista de elevación que muestre la cubierta y el piso del filón como dos filos paralelos, mostrará también el buzamiento de la vena.

Nota: El estudiante debe asegurarse de que el buzamiento se mida en una vista de elevación y no en una vista inclinada.

Ejemplo: En la Fig. 9-4 un pozo de sondeo vertical que parte de *A* corta la cubierta del filón en *B* y el piso del filón en *C*. Un pozo de sondeo inclinado que parte de *D* corta la cubierta del filón en *E* y el piso del filón en *F*. Los puntos *B* y *E*, situados sobre la cubierta del filón, se unen con una línea, la cual aparece en su verdadera longitud en la vista de elevación auxiliar 1. La vista de punta de la línea *BE* aparecerá sobre la vista de filo de la cubierta del filón en la vista inclinada 2. Los puntos *C* y *F* situados en el piso del filón aparecerán en la vista inclinada 2, y puesto que la cubierta y el piso del filón se asumen paralelos, una línea trazada a través de *C* y *F* determinará también la dirección de la cubierta del filón que pasa por la vista de punta de la línea *BE*. El espesor de la vena se mide en esta vista.

Para determinar el rumbo de la vena se traza una línea horizontal de cualquier longitud sobre la cubierta del filón, en la vista 1, y se proyecta a la vista 2, donde la cubierta del filón aparece como un filo. Ahora esta línea horizontal se puede localizar en la vista de planta, para determinar el rumbo de la vena. Una nueva vista de elevación auxiliar que muestre la línea de rumbo como un punto, mostrará también la cubierta y el piso del filón como líneas paralelas, verificando el espesor de la vena obtenido en la vista 2 y mostrando, además, el buzamiento de la vena.

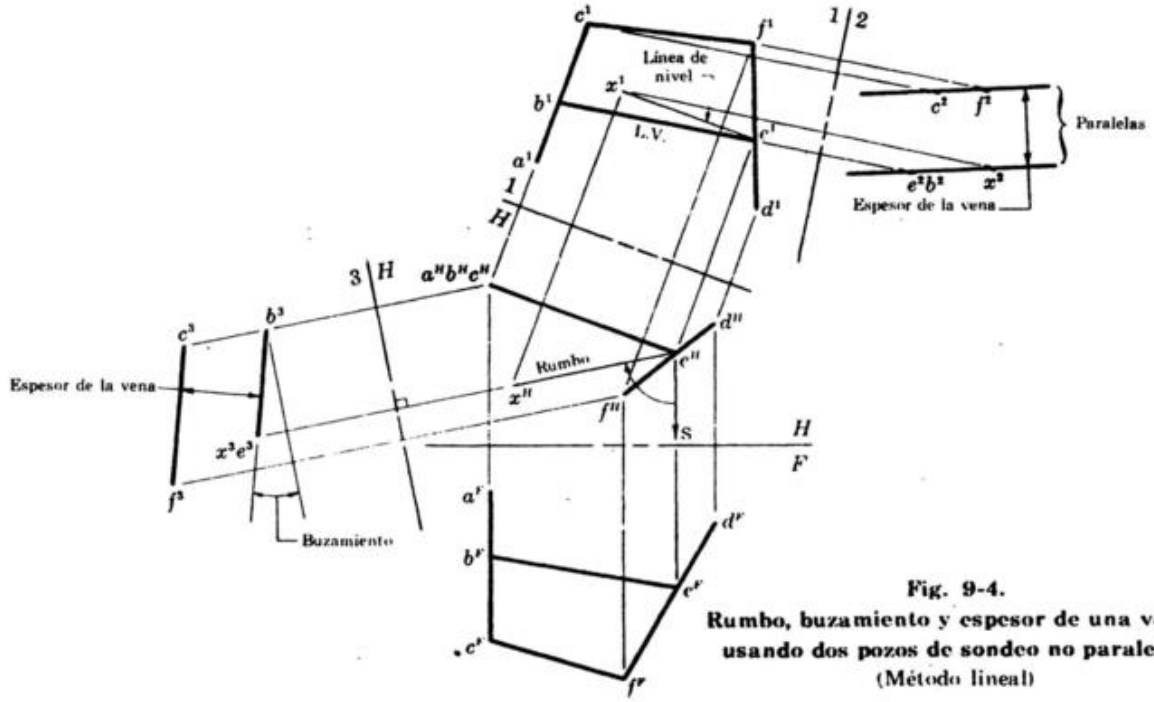


Fig. 9-4.
Rumbo, buzamiento y espesor de una vena, usando dos pozos de sondeo no paralelos
(Método lineal)

B. **Método del plano:** Una los dos puntos pertenecientes a la cubierta del filón, así como los dos puntos situados en el piso del filón. Utilizando el método del Art. 3.1, dibuje un plano que contenga a una de las líneas y sea paralelo a la otra. Construya una vista de elevación que muestre el plano como un filo, paralelo a la otra línea. Debido a que esta vista de elevación muestra la cubierta y el piso del filón como dos filos paralelos, el buzamiento y el espesor de la vena se pueden medir en esta vista. El rumbo de la vena se determinará en la vista de planta de una línea horizontal que pertenezca a la cubierta o bien al piso del filón.

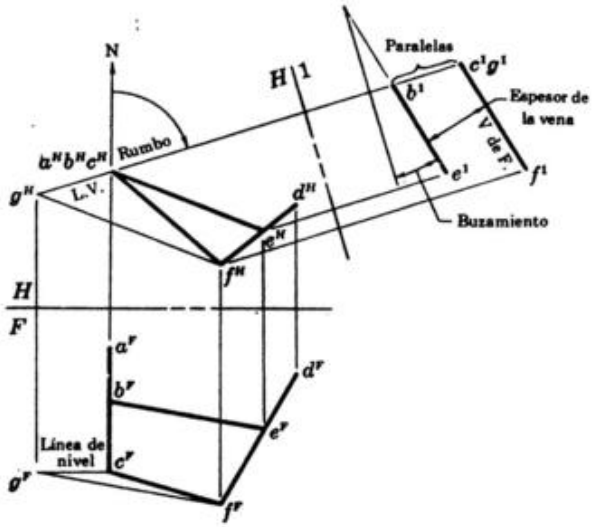


Fig. 9-5.
Rumbo, buzamiento y espesor de una vena, usando dos pozos de sondeo no paralelos (Método del plano)

Ejemplo: Ver la Fig. 9-5. Con los mismos datos utilizados en el ejemplo del método lineal, dibuje un plano que contenga a la línea *CF* y a la línea *GF* que es paralela a la línea *BE*, tanto en la vista de planta como en la vista de elevación frontal. Haga la línea *GF* lo suficientemente larga, en la vista frontal, para que la línea *CG* sea una línea horizontal. De este modo, la línea *CG* aparecerá en su verdadera longitud en la vista de planta y determinará el rumbo de la vena. La vista de elevación auxiliar 1 mostrará el plano *CFG* como un filo paralelo al piso del filón. El buzamiento y el espesor de la vena se miden en esta vista.

9.5 METODO ABREVIADO DEL GEOLOGO PARA ENCONTRAR EL BUZAMIENTO APARENTE CUANDO SE CONOCE EL BUZAMIENTO VERDADERO Y EL RUMBO

Uno de los problemas encontrados con más frecuencia por el estudiante de Geología es el de determinar el buzamiento aparente de un estrato cuando se conoce el buzamiento verdadero y el rumbo. Por definición, el buzamiento aparente de un estrato es el ángulo de pendiente de cualquier línea contenida en el plano del estrato, diferente de la línea de buzamiento. Como ya sabemos, el buzamiento verdadero es el ángulo de pendiente del estrato, que se mide perpendicular al rumbo y descendiendo desde el plano horizontal. Una línea de buzamiento aparente, que no sea perpendicular a la línea de rumbo, debe tener siempre un ángulo de pendiente menor que el buzamiento verdadero.

Análisis: Trace una línea paralela a la línea de rumbo dada que corte la vista de planta tanto de la línea de buzamiento verdadero como de la línea de buzamiento aparente. Esta nueva línea de rumbo puede ser trazada a cualquier distancia de la línea de rumbo dada, pero su localización determinará la distancia vertical a la cual esta línea está por debajo de la línea de rumbo dado. Si la línea de buzamiento verdadero se gira 90° en un plano de proyección horizontal, aparecerá

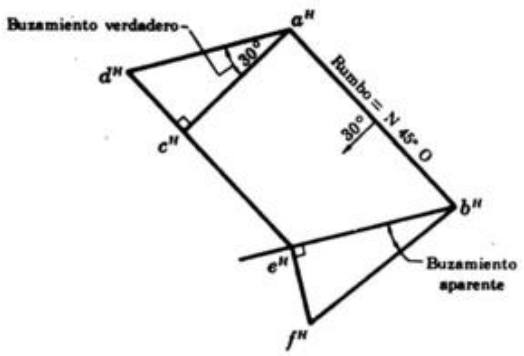


Fig. 9-6.
Buzamiento aparente (Método del geólogo)

el ángulo de buzamiento verdadero. Si la línea de buzamiento aparente se gira 90° en un plano de proyección horizontal, aparecerá el buzamiento aparente, el cual será menor que el buzamiento verdadero.

Ejemplo: En la Fig. 9-6 se da el rumbo *AB* y el ángulo de buzamiento verdadero. Se traza una línea de rumbo auxiliar a una distancia conveniente de la línea de rumbo dada, que corte la vista de planta de la línea de buzamiento verdadero y de la línea de buzamiento aparente en los puntos *C* y *E*, respectivamente. El buzamiento verdadero se construye en *A* (ángulo *CAD*), determinando así el punto *D*. La línea *EF* se traza perpendicular a la vista de planta de la línea de buzamiento aparente, *BE*, y su longitud es igual a la de la línea *CD*. El ángulo de buzamiento aparente es *EBF*.

9.6 DESMONTES Y TERRAPLENES

De los muchos tipos de problemas encontrados por los ingenieros civiles, uno de los más comunes es el de determinar la extensión de los desmontes y terraplenes necesarios en la construcción de carreteras y vías férreas. Una vez determinada la localización de una nueva carretera es de vital importancia saber exactamente cuánta tierra debe removerse en una ladera para rellenar depresiones y llegar al nivel requerido. (Ver la Fig. 9-7). Los principios utilizados son completamente similares a los que se usaron anteriormente en este capítulo, en la determinación del afloramiento de un estrato.

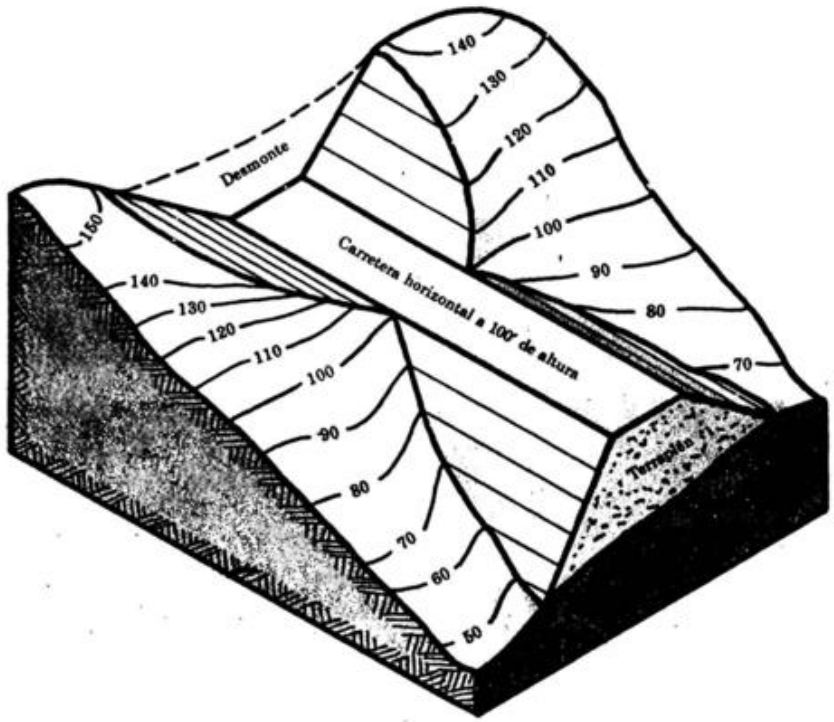


Fig. 9-7

Los siguientes son algunos de los términos utilizados en la localización de desmontes y terraplenes.

(1) *Perfil* — una sección vertical de la superficie de la tierra que contiene a una línea dada, la cual puede ser recta o curva. La longitud del perfil debe ser igual a la longitud verdadera de la línea dada. (Ver la Fig. 9-8).

(2) *Corte de sección* — una sección vertical que corta perpendicularmente la línea de perfil.

(3) *Desmonte* — tierra que se remueve con el fin de obtener la pendiente o la elevación deseada.

(4) *Terraplén* — tierra que se agrega al contorno existente, para obtener la pendiente o la elevación deseada.

(5) *Angulo de reposo* — cuando se descarga tierra suelta sobre una superficie horizontal, se forma un cono circular recto. El máximo ángulo de pendiente que el costado de la tierra, u otro material semejante, puede tener sin que haya deslizamiento, se llama ángulo de reposo. Esta pendiente se designa generalmente por una relación, cuyo primer número es la distancia horizontal y cuyo segundo número es la distancia vertical.

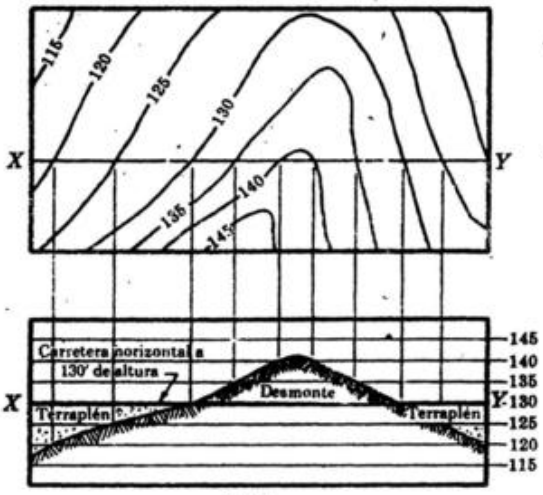


Fig. 9-8

Ejemplo: La Fig. 9-9 muestra el plano topográfico y la localización propuesta de una carretera horizontal a 100' de altura y de una anchura dada. El ángulo de reposo para desmontes y terraplenes es $1\frac{1}{2}$:1. Se pide mostrar los límites de los desmontes y los terraplenes.

Dibuje una sección típica de la carretera, que muestre las distancias verticales entre los planos horizontales tanto para los desmontes como para los terraplenes. Trace líneas que tengan el ángulo de reposo correcto desde ambos bordes de la carretera. Sobre el plano topográfico trace curvas de nivel de desmonte y terraplén, paralelas a la línea media de la carretera, proyectadas desde la sección. La intersección de estas curvas de nivel paralelas con sus correspondientes curvas de nivel naturales determinarán los puntos pertenecientes a las líneas de desmonte y terraplén. Una estos puntos, como se muestra, para determinar los límites exactos de los desmontes y los terraplenes.

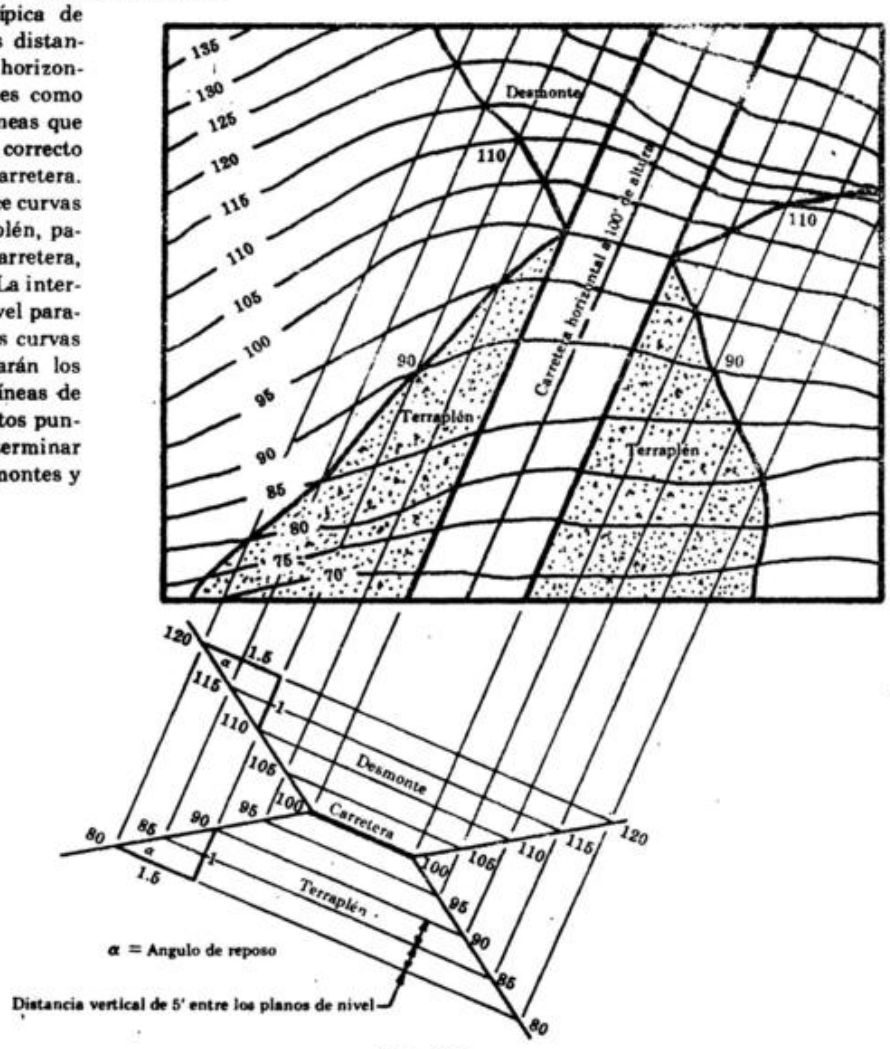


Fig. 9-9

Problemas resueltos

1. Dado: *A*, *B* y *C* son tres puntos situados sobre la cubierta del estrato. El punto *B* está localizado 110′ al este, 230′ al norte y 120′ por encima de *A*. El punto *C* está 270′ al este, 80′ al norte y 100′ por encima de *A*. Ver la Fig. 9-10. Escala: 1″ = 300′.

Problema: Determine el rumbo y el buzamiento del estrato.

Solución:

Usando los datos, localice los tres puntos en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. Una los tres puntos para representar el plano, en ambas vistas. Una línea horizontal en la vista frontal, determinará el rumbo en la vista de planta. Coloque la línea de pliegue *H*-1 perpendicular al rumbo y construya una vista de elevación auxiliar 1 para mostrar el plano como un filo. El buzamiento se mide en esta vista.

Resp. Rumbo = N 58° O, buzamiento = 25°

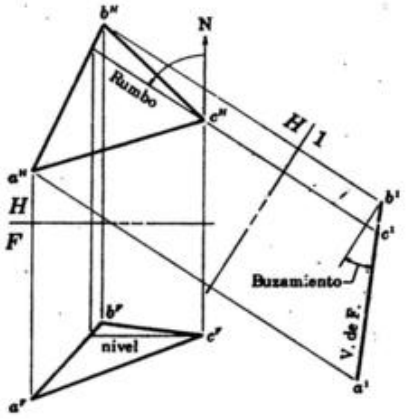


Fig. 9-10

2. Dado: Los puntos *A*, *B* y *C* están sobre el plano superior de estratificación de una vena de mineral. El punto *B* está 10′ exactamente al este, y 7′ por debajo de *A*. El punto *C* está localizado 20′ al este, 10′ al sur y 8′ por encima de *A*. El punto *D*, localizado en el plano inferior de estratificación, está 8′ directamente debajo de *C*. Ver la Fig. 9-11. Escala: 1″ = 20′.

Problema: Determine el rumbo, el buzamiento y el espesor de la vena.

Solución:

Utilizando los datos, construya la vista de planta y la vista de elevación frontal del plano *ABC* y del punto *D*. Una línea horizontal, perteneciente al plano, mostrará el rumbo en la vista de planta. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 para mostrar el plano *ABC* como un filo y el punto *D*. El buzamiento se mide en esta vista. El plano inferior de estratificación se puede dibujar a través del punto *D*, paralelo a la vista de filo del plano *ABC*. La distancia perpendicular entre las dos líneas paralelas es el espesor de la vena.

Resp. Rumbo = N 72° O
Buzamiento = 66°
Espesor = 3′—3″

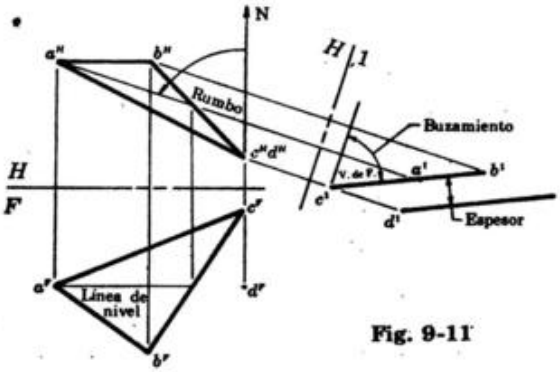


Fig. 9-11

3. Dado: La Fig. 9-12(*a*) es un plano topográfico que muestra el punto *C* como un punto de afloramiento perteneciente al plano superior del estrato. Los puntos *A* y *B* son dos pozos de sondeo verticales que tocan el estrato a unas alturas de 160′ y 210′, respectivamente. El pozo de sondeo que parte de *B* se prolonga a través del estrato y encuentra el piso del filón en un punto situado a una altura de 195′. El pun-

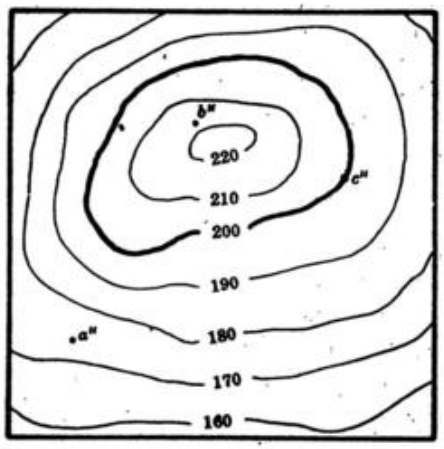


Fig. 9-12(*a*)

to *B* está localizado 65′ al este y 115′ al norte de *A*. El punto *C* está localizado 140′ al este, y 85′ al norte de *A*. Escala: 1″ = 100′.

Problema: Determine el rumbo, el buzamiento y el espesor del estrato.

Solución:

Construya la vista de planta y la vista de elevación frontal, mostrando los puntos *A*, *B* y *C* sobre el plano superior de estratificación y localice el punto *D* sobre el plano inferior de estratificación, como se muestra en la Fig. 9-12(*b*). Una línea horizontal perteneciente al plano superior de estratificación determinará el rumbo del estrato en la vista de planta. Dibuje una vista de elevación auxiliar 1 para mostrar el plano *ABC* como un filo. El buzamiento verdadero del estrato se mide en esta vista. Localice el punto *D* en esta vista y trace una línea a través del punto *D*, paralela a la vista de filo del plano *ABC*. La distancia perpendicular entre los dos planos de estratificación determina el espesor del estrato.

Resp. Rumbo = N 86° O
Buzamiento = 22°30′
Espesor = 13′—6″

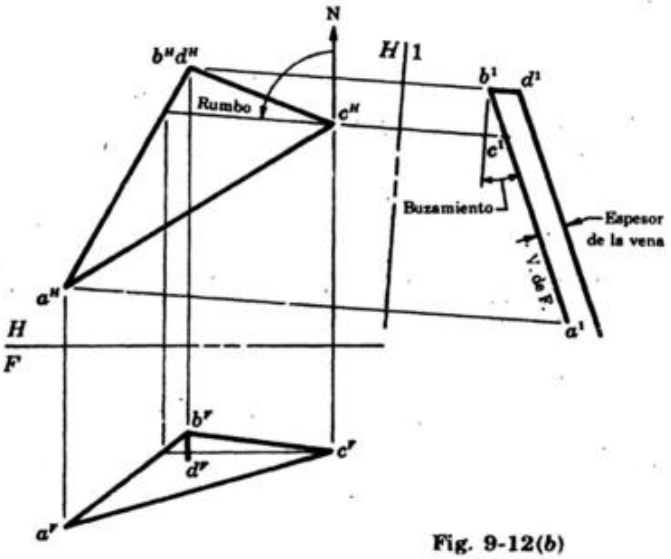


Fig. 9-12(*b*)

4. **Dado:** El plano superior de un estrato de mineral contiene los puntos *A* y *B* y tiene un rumbo N 60° O y un buzamiento 45° SO. *A*(2, 1½, *X*), *B*(4½, 2½, 5). Ver la Fig. 9-13. Escala: 1″ = 40′.

Problema: Determine la distancia verdadera desde *A* hasta *B*.

Solución:

Utilizando los datos, localice los puntos *A* y *B* en la vista frontal y el punto *B* en la vista de planta. Dibuje un plano *ABC*, en la vista frontal, que contenga a la línea horizontal *BC*. La línea *BC* tendrá el rumbo dado, N 60° O, en la vista de planta. Localice la línea de pliegue *H*-1 perpendicular a la línea de rumbo y construya la vista de punta de la línea *BC*. Puesto que la vista 1 es una vista de elevación, el buzamiento de 45° del plano puede mostrarse en esta vista. Localice el punto *A* en la vista 1, trasladando la distancia desde la vista frontal. Proyecte desde la vista 1 para localizar *A* en la vista de planta. Por revolución, localice la posición girada del punto *A* en la vista de planta y mida la distancia verdadera de *A* a *B* en esta vista.

Resp. Distancia verdadera = 53′—9″

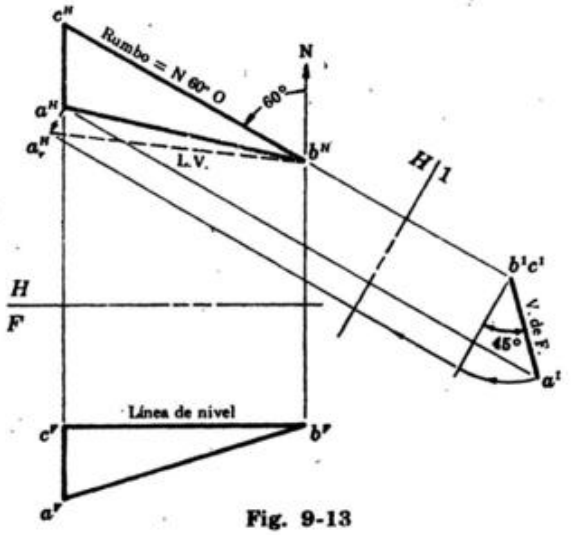


Fig. 9-13

5. **Dado:** La Fig. 9-14 (*a*) muestra un plano topográfico, cuya área sombreada revela el afloramiento de un estrato. Escala: 1″ = 60′.

Problema: Determine el rumbo, el buzamiento y el espesor del estrato.

Solución:

Una dos puntos situados sobre la misma línea de afloramiento que tengan la misma elevación, como

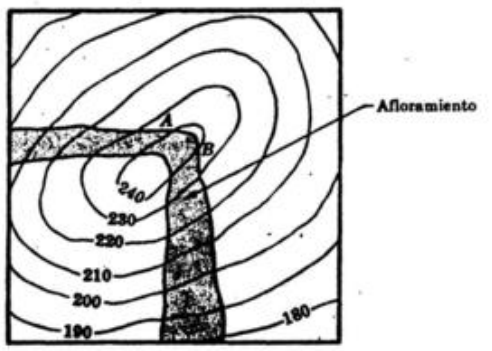


Fig. 9-14(*a*)

se muestra en la Fig. 9-14(*b*). Aquí se escogieron los puntos *A* y *B* situados sobre la curva de nivel de 240′ de altura. El ángulo entre la línea *AB* y la dirección norte determinará el rumbo. A un lado del mapa topográfico trace líneas de elevación paralelas con intervalos de 10′. Estas líneas se trazan perpendiculares al rumbo. Proyecte varios puntos desde el plano topográfico hasta las líneas de elevación, como se muestra. Las intersecciones así obtenidas determinarán el espesor del estrato. El buzamiento también se puede medir en esta vista.

Resp. Rumbo = N 55° O, buzamiento = 45°, espesor = 13′

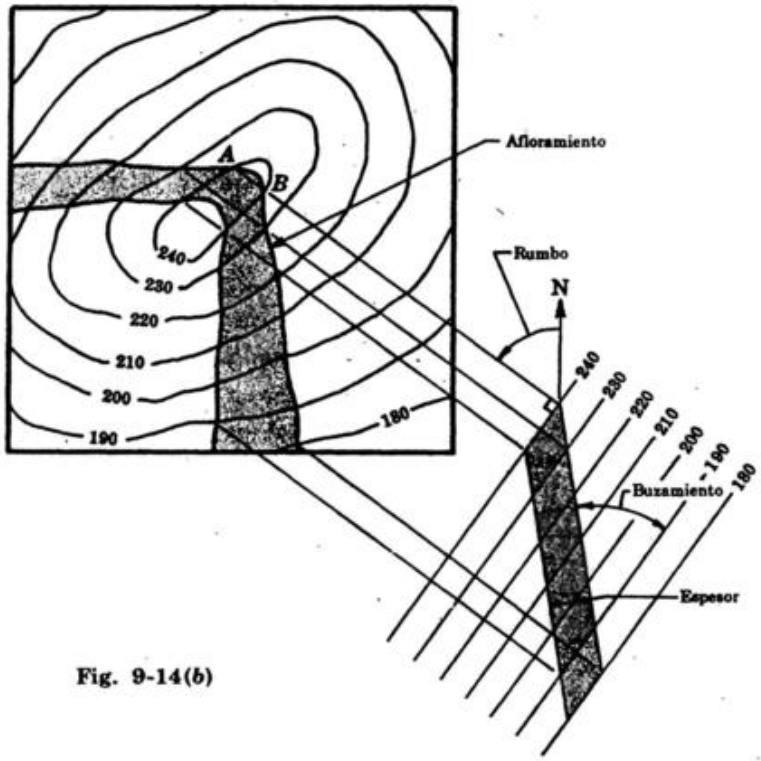


Fig. 9-14(*b*)

6. **Dado:** En la Fig. 9-15(*a*) los puntos *A* y *B* indican la localización en la superficie de dos pozos de sondeo, cruzados, que penetren en el estrato. El punto *A* está 50′ más bajo que el punto *B*. El ángulo de pendiente y el rumbo del pozo de sondeo que parte de *A* se muestran en la figura. Desde *A* se llega a la cubierta y al piso del filón después de taladrar 75′ y 300′, respectivamente. Desde *B* se llega a la cubierta y al piso del filón después de taladrar 50′ y 125′ respectivamente. Escala: 1″ = 200′.

Problema: Determinar el rumbo, el buzamiento y el espesor del estrato.

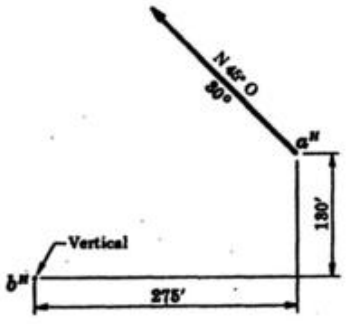


Fig. 9-15(*a*)

Solución:

Dibuje la vista dada como se muestra en la Fig. 9-15(*b*). Localice la línea de pliegue *H*-1 paralela a la línea de rumbo del pozo de sondeo que parte de *A*. Construya una vista de elevación auxiliar 1 que muestre la pendiente del pozo que parte de *A*, así como también los puntos *W* y *X* que representan la cubierta y el piso del filón respectivamente. Proyecte *W* y *X* a la vista de planta. Muestre el pozo de sondeo *AX* en la vista frontal. Construya la vista de elevación frontal del pozo vertical que parte de *B*, mostrando *Y* y *Z*, que representan la cubierta y el piso del filón, respectivamente. Una *Y* con *W* y *Z* con *X* en la vista de planta y en la vista de elevación frontal. En la vista frontal construya un plano *YWV* que contenga una línea horizontal *YV*, y una línea *VW* paralela a *ZX*. Muestre el plano *YWV* en la vista de planta, nuevamente con *VW* paralela a *ZX*. El rumbo del estrato se mide en la vista de planta. Coloque la línea de pliegue *H*-2 perpendicular al rumbo del estrato y dibuje una vista de elevación auxiliar 2 que muestre la cubierta y el piso del filón paralelos. En la vista 2, la distancia perpendicular es el espesor de la vena. El buzamiento se mide también en esta vista.

Resp. Rumbo = N 83° E, buzamiento = 15°, espesor = 72′

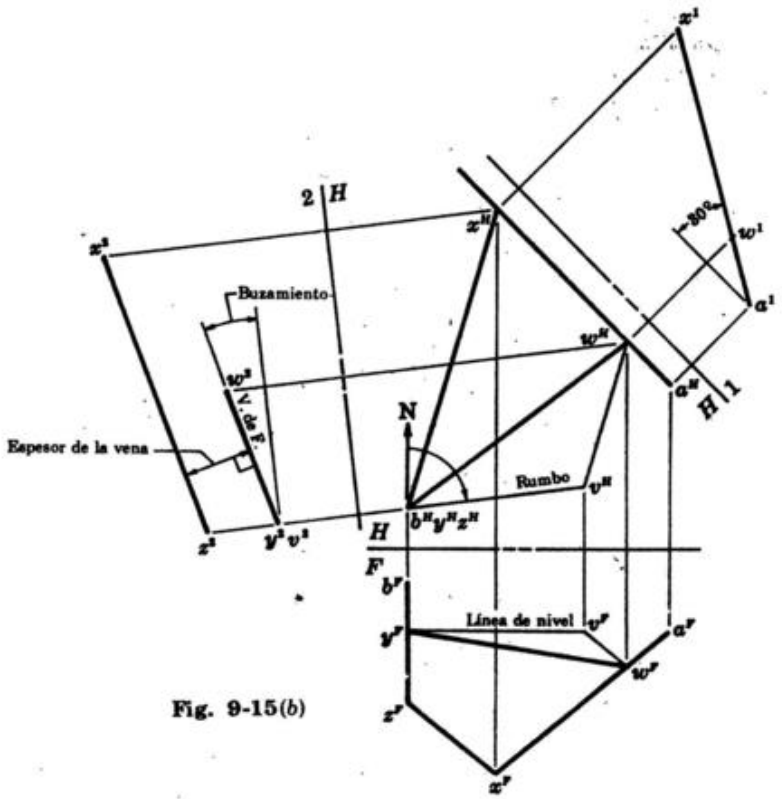


Fig. 9-15(*b*)

7. **Dado:** Los puntos *A*, *B* y *C* están localizados sobre un estrato de mineral (Ver la Fig. 9-16). Se taladra un pozo de sondeo vertical desde el punto *X*, situado en la superficie de la tierra. *B* está 110′ al este, 40′ al sur y 20′ por encima de *A*. El punto *C* está 80′ al este, 60′ al norte y 70′ por encima de *A*. El punto *X* está localizado 60′ exactamente al este, y 80′ por encima de *A*. Escala: 1″ = 60′.

Problema: Usando únicamente 2 vistas, determine hasta qué profundidad se debe taladrar para alcanzar el estrato. ¿Cuál es el rumbo del plano?

Solución:

Utilizando los datos, dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal del plano *ABC* y del punto *X*. Trace una línea horizontal en la vista frontal y mida el rumbo del estrato en la vista de planta. En esta vista trace una línea desde el punto *A* que pase por el punto *X*, hasta que corte a *BC* en el punto *D*. Muestre esta línea en la vista frontal del plano. En la vista frontal trace una línea vertical desde el punto *X* hasta tocar la línea *AD*. Llame este punto de intersección, *Y*. Mida *XY* en la vista frontal para obtener la longitud del pozo de sondeo vertical que se pide.

Resp. Pozo de sondeo = 55′—6″
Rumbo = N 56°30′ O

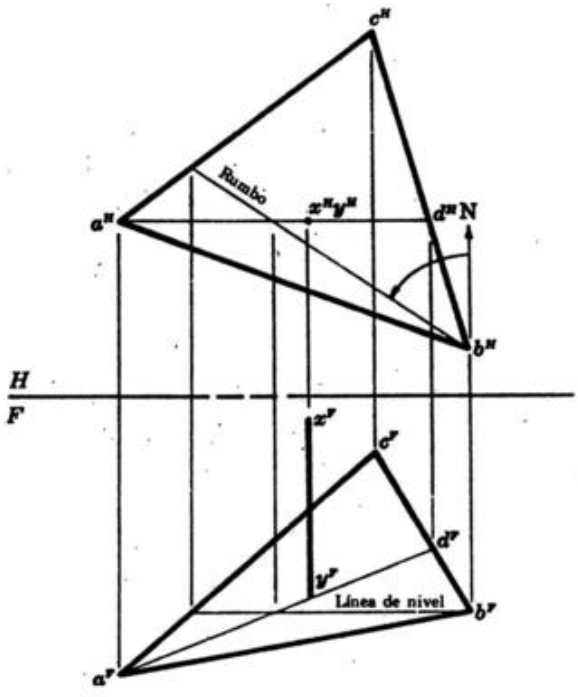


Fig. 9-16

8. Dado: Los puntos *A*, *B* y *C* están localizados sobre el plano superior de estratificación de una vena de mineral. El punto *B* está 30′ al este, 60′ al norte y 45′ por debajo de *A*. El punto *C* está localizado 60′ al este, 15′ al norte y 20′ por encima de *A*. Remítase a la Fig. 9-17. Escala: 1″ = 40′.

Problema: ¿Cuál es el rumbo de la vena? Utilizando únicamente 2 vistas, determine el buzamiento verdadero de la vena, por revolución.

Solución:

Usando los datos, dibuje la vista de planta y la vista de elevación frontal del plano *ABC*. Una línea horizontal *AD* determinará el rumbo de la vena en la vista de planta. Desde el punto *B*, en la vista de planta, trace una línea perpendicular a *AD*. Llame este punto de intersección, *E*. Localice *BE* en la vista frontal. Gire *BE* en la vista de planta y muestre la posición girada de *BE* en la vista de elevación frontal. El buzamiento verdadero se mide desde una línea de base horizontal, como se muestra.

Resp. Rumbo = N 60°30′ E
Buzamiento = 50°

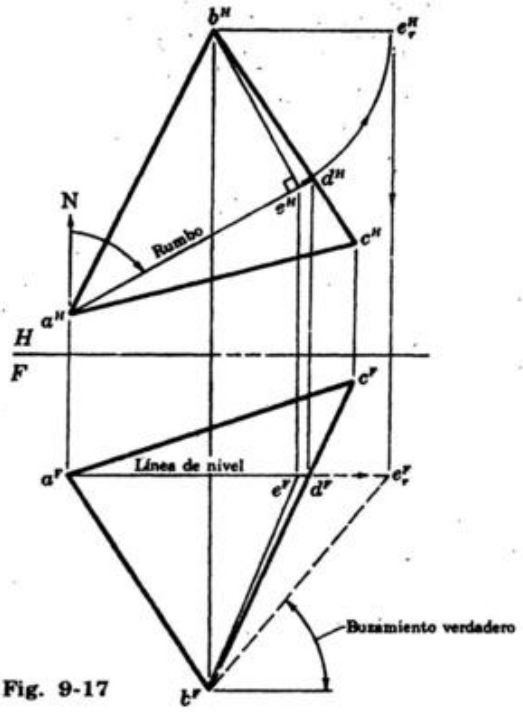


Fig. 9-17

9. Dado: Un plano topográfico: Rumbo = S 45° O, buzamiento verdadero = 50° NO, dirección del buzamiento aparente = exactamente hacia el oeste. Ver la Fig. 9-18.

Problema: Usando el método del geólogo, determine el buzamiento aparente.

Solución:

Trace desde *A* una línea con rumbo S 45° O. A partir del punto *A*, construya el buzamiento verdadero, 50° NO. Trace una línea paralela a la línea de rumbo. Trace la línea de buzamiento aparente, *DE*, directamente hacia el oeste. A partir del punto *E* construya un triángulo rectángulo, con la distancia *EF* igual en longitud a *BC*. El ángulo *EDF* es el ángulo de buzamiento aparente que se pide. *Resp.* Buzamiento aparente = 40°

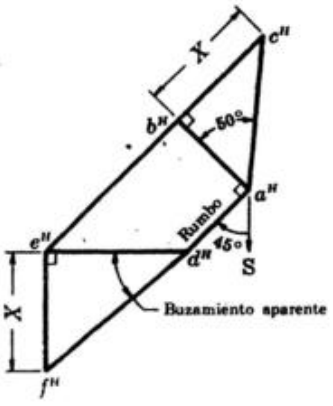


Fig. 9-18

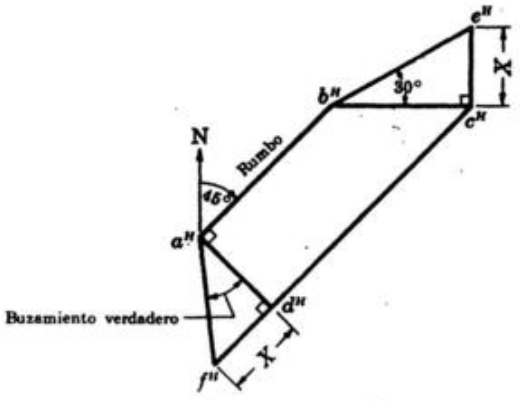


Fig. 9-19

10. Dado: Un plano topográfico: Rumbo = N 45° E, dirección del buzamiento aparente = exactamente hacia el este, buzamiento aparente = 30°. Ver la Fig. 9-19.

Problema: Usando el método del geólogo, determine el buzamiento verdadero.

Solución:

A partir del punto A trace una línea con el rumbo dado, N 45° E. Termine la línea de rumbo en B y trace la línea de buzamiento aparente, BC, directamente hacia el este. Construya el ángulo de buzamiento aparente de 30°. Trace una línea CD paralela a la línea de rumbo. Por el punto C trace una perpendicular a BC que termine en E. Trace la línea AD perpendicular a la línea de rumbo y construya un triángulo rectángulo que tenga el lado DF igual a CE. El ángulo DAF es el ángulo de buzamiento verdadero que se pide.
Resp. Buzamiento verdadero = 39° SE

11. Dado: La Fig. 9-20(a) muestra un plano topográfico, en el cual XY representa la línea media de una carretera horizontal propuesta. La carretera tiene 20′ de ancho y su elevación es de 100′. El ángulo de reposo para desmontes y terraplenes es 1:1. Escala: 1″ = 40′.
Problema: Determine la extensión de los desmontes y los terraplenes.

Solución:

Usando los datos, dibuje la carretera con ancho de 20′ y con XY como línea media [ver la Fig. 9-20(b)] Dibuje una sección típica de la carretera, que muestre distancias verticales de 5′ entre los planos horizontales, con el ángulo de reposo 1:1. Proyecte las curvas de nivel de desmonte y terraplén desde la sección hasta el plano topográfico y dibújelas paralelas a la línea media de la carretera. La intersección de estas líneas paralelas con sus correspondientes curvas de nivel naturales determinará los puntos pertenecientes a las líneas de desmonte y terraplén. Una estos puntos, como se muestra, para localizar los límites exactos de los desmontes y los terraplenes.

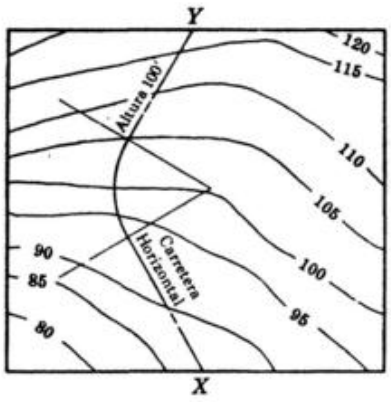


Fig. 9-20(a)

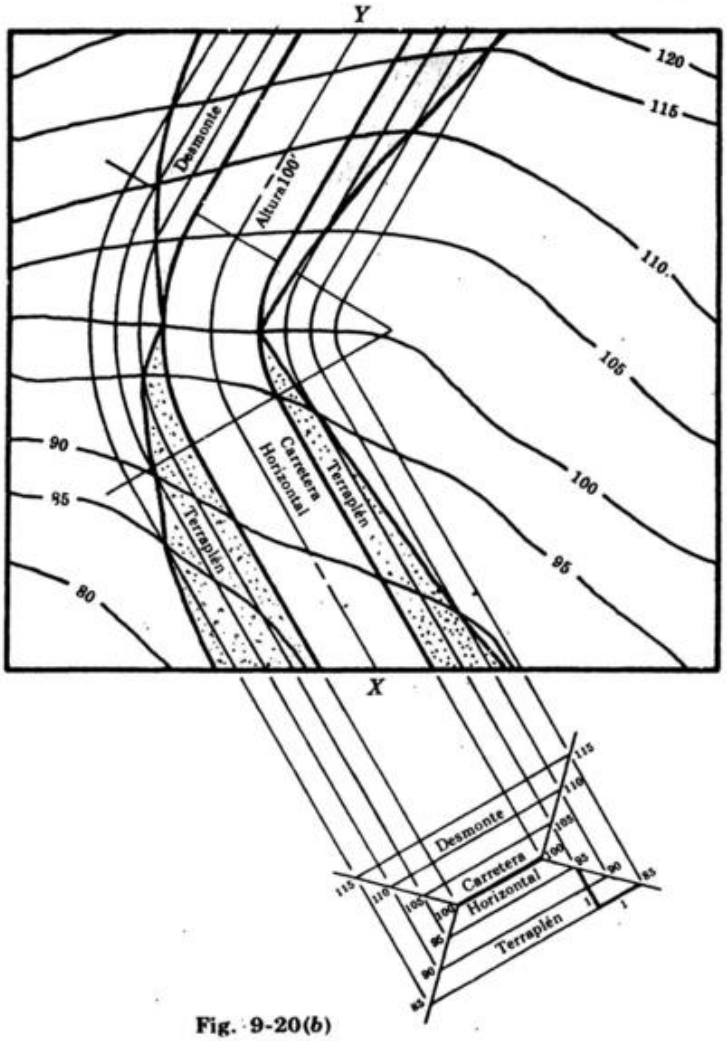


Fig. 9-20(b)

Problemas propuestos

En cada uno de los siguientes problemas determine y designe el rumbo y el buzamiento del plano *ABC*. Ver en el Art. 1.7 la presentación de problemas por medio de coordenadas.

		Rumbo	Buzamiento
12.	$A(1, 1, 4)$, $B(2, \frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$, $C(3\frac{1}{2}, 2, 4\frac{1}{2})$	*Resp.* S 83°30′ E	52°
13.	$A(1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}, 4)$, $B(2\frac{1}{2}, 2, 4\frac{1}{2})$, $C(3\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$	*Resp.* exact. E—O	56°30′
14.	$A(1\frac{1}{4}, 2, 5)$, $B(2\frac{1}{4}, 3, 4)$, $C(3, 3\frac{1}{2}, 5\frac{1}{4})$	*Resp.* N 6° E	41°30′
15.	$A(4, 1\frac{1}{2}, 5)$, $B(4\frac{1}{2}, 1, 3)$, $C(6, 1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$	*Resp.* S 76° E	15°30′
16.	$A(3\frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}, 4\frac{1}{2})$, $B(5, 1, 3\frac{1}{4})$, $C(7, 1\frac{1}{4}, 3\frac{1}{2})$	*Resp.* S 74° E	17°30′
17.	$A(2, 2, 7)$, $B(3, 3\frac{1}{2}, 5)$, $C(4\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$	*Resp.* N 85°30′ E	36°

18. En la Fig. 9-21(*a*) los tres puntos *A*, *B* y *C* determinan el plano superior de un estrato. Sus alturas se indican en la figura, entre paréntesis. Escala: 1″ = 100′. El punto topográfico de referencia (B. M.) es el punto con respecto al cual se dan los rumbos y las distancias horizontales. Determine el rumbo y el buzamiento del estrato.
Resp. Rumbo del estrato = N 54°30′ E, buzamiento = 29°

19. En la Fig. 9-21(*b*) los tres puntos *A*, *B* y *C* determinan el plano superior de un estrato. Sus alturas se indican en la figura, entre paréntesis. Escala: 1″ = 200′. El punto topográfico de referencia (B. M.) es el punto con respecto al cual se dan los rumbos y las distancias horizontales. Determine el rumbo y el buzamiento del estrato.
Resp. Rumbo del estrato = S 56°30′ E, buzamiento = 21°30′

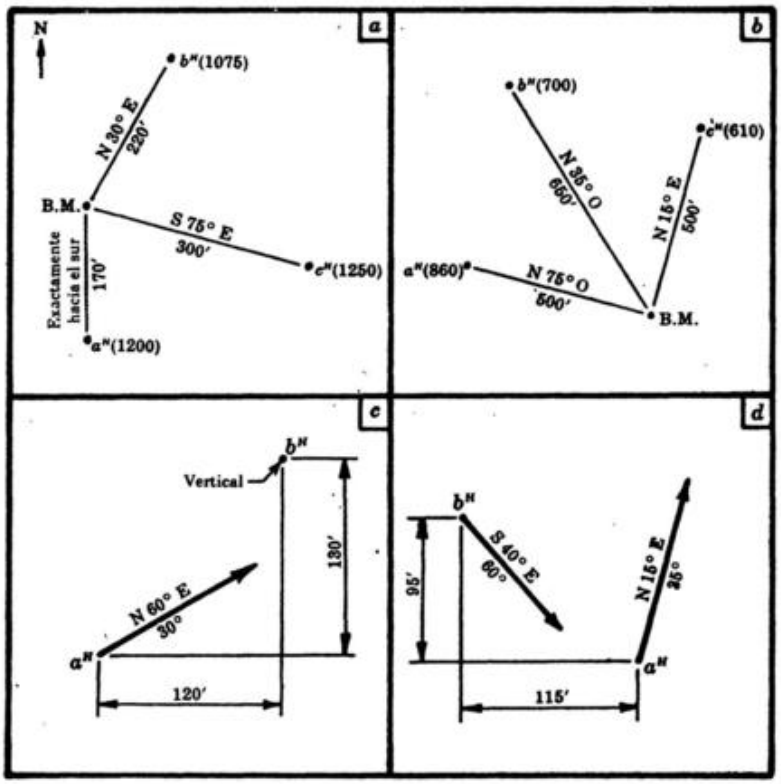


Fig. 9-21. Problemas relativos al rumbo, buzamiento y espesor de venas

20. En la Fig. 9-21(*c*) los puntos *A* y *B* indican la localización en la superficie de dos pozos de sondeo cruzados que penetran en una vena de mineral. El ángulo de pendiente y el rumbo del pozo que parte de *A* se muestran en la figura. El punto *A* está localizado 40′ más abajo que el punto *B*. Desde *A* se llega a la cubierta y al piso del filón después de taladrar 30′ y 100′ respectivamente. Desde *B* se llega a la cubierta y al piso del filón después de taladrar verticalmente 25′ y 60′, respectivamente. Escala: 1″ = 50′. Determine el rumbo, el buzamiento y el espesor de la vena. *Resp.* Rumbo de la vena = N 61° E, buzamiento = 29°, espesor = 31′

21. En la Fig. 9-21(*d*) los puntos *A* y *B* indican la localización en la superficie de dos pozos de sondeo, no paralelos, que penetran en una vena de piedra de arena. El punto *A* está 25' más arriba que el punto *B*. El ángulo de pendiente y el rumbo de cada uno de los pozos se dan en la figura. Desde *A* se llega al plano superior de estratificación y al piso del filón, después de taladrar 50' y 100', respectivamente. Desde *B* se llega a los planos de estratificación superior e inferior, después de taladrar 40' y 125' respectivamente. Escala: 1" = 50'. Determine el rumbo, el buzamiento y el espesor del estrato. *Resp.* Rumbo = N 54°30' O, buzamiento = 43°, espesor = 47'

22. En la Fig. 9-22 los puntos *X* y *Y* están localizados sobre un estrato de mineral, que tiene un rumbo N 60° O y un buzamiento de 45° SO. Escala: 1" = 60'. Localice la vista de planta del punto *X*. ¿Cuál será el rumbo de una línea que une a *X* con *Y*? *Resp.* Rumbo = N 88°30' O

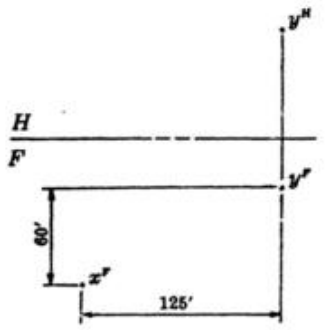


Fig. 9-22

23. Se taladran dos pozos de sondeo hacia un estrato de mineral. El pozo que parte de *A* tiene un rumbo N 45° O y una pendiente de 35°. Este pozo toca la cubierta del filón después de que se ha taladrado hasta un nivel de 240' por debajo de la superficie. Al piso del filón se llega después de taladrar hasta un nivel de 360' por debajo de la superficie. El pozo que parte de *B* (*B* está localizado 300' exactamente al este y a la misma elevación que *A*) tiene un rumbo N 45° O y una pendiente de 45°. Este pozo toca la cubierta del filón después de que se ha taladrado hasta un nivel de 220' por debajo de la superficie, y llega al piso del filón después de taladrar hasta un nivel de 430' por debajo de la superficie. Escala: 1" = 200'. Utilizando el método del plano, determine el rumbo, el buzamiento y el espesor del estrato.
Resp. Rumbo del estrato = N 79° O, buzamiento = 72°, espesor = 54'

24. Usando los mismos datos del problema 23, determine el rumbo, el buzamiento y el espesor del estrato, utilizando el método lineal. Escala: 1" = 200'. *Resp.* Rumbo = N 79° O, buzamiento = 72°, espesor = 54'

25. Los puntos *A*, *B* y *C* están localizados sobre el plano superior de un estrato de mineral (ver la Fig. 9-23). El punto *B* pertenece también a la línea de afloramiento. El punto *D* está localizado sobre el plano inferior de estratificación y está 50' directamente por debajo de *C*. Los pozos de sondeo que llegan a *A* y *C* tocan el plano superior de estratificación a alturas de 200' y 300' respectivamente. Trace el plano topográfico y determine el rumbo, el buzamiento y el espesor de la vena. Trace las líneas de afloramiento.
Resp. Rumbo de la vena = N 75°30' O, buzamiento = 63°30', espesor = 22'

Fig. 9-23

26. Una vena de mineral está determinada por el plano ABC. La línea XY es un pozo de extracción dirigido en la dirección del estrato. El punto B está 100′ al este, 75′ al sur y 85′ por encima de A. El punto C está 200′ al este, 50′ al norte y 25′ por encima de A. El punto X está 150′ al este, 50′ al sur y 25′ por debajo de A. El punto Y está 250′ al este, 90′ al sur y 75′ por debajo de A. Escala: 1″ = 50′. Usando únicamente dos vistas, determine cuánto se debe prolongar el pozo para llegar hasta la vena. Determine el rumbo y el buzamiento de la vena.
Resp. El pozo se prolonga 115′, rumbo = S 67° O, buzamiento = 38°30′

27. Los puntos A, B y C están localizados sobre la cubierta de un estrato. El punto X está localizado sobre un pozo, desde el cual se dirige un túnel hacia el estrato. El punto B está localizado 15′ al este, 30′ al sur y 15′ por encima de A. El punto C está localizado 45′ al este, 10′ al norte y 10′ por encima de A. El punto X está 25′ al norte, 10′ al oeste y 30′ por encima de A. Escala: 1″ = 20′. Determine la distancia más corta, el rumbo y la pendiente de un túnel que vaya desde X hasta el estrato. Muestre el túnel en todas las vistas.
Resp. Distancia más corta = 37′—9″, rumbo = S 42° E, pendiente = 66°

28. Utilizando los mismos datos del problema 27, determine la distancia más corta desde el punto X hasta el estrato, si el túnel debe tener un declive del 20%. Escala: 1″ = 20′. Determine el rumbo y el buzamiento del estrato. Muestre el túnel en todas las vistas.
Resp. Distancia más corta = 65′—6″, rumbo = N 51° E, buzamiento = 24°30′

29. A y B son dos puntos situados sobre la línea superior de afloramiento de una vena de mineral. Un pozo de sondeo vertical que parte de C llega al plano superior a una profundidad de 30′ y al piso del filón a una profundidad de 45′. El punto B está localizado 50′ al oeste, 250′ al sur y 100′ por debajo de A. El punto C está localizado 150′ al este, 75′ al sur y 70′ por debajo de A. Escala: 1″ = 100′. Determine el rumbo, el buzamiento y el espesor del estrato. *Resp.* Rumbo = N 49° E, buzamiento = 32°, espesor = 12′

30. Usando los mismos datos del problema 29, determine el rumbo, el buzamiento y el espesor del estrato, si el pozo de sondeo que parte de C llega a la cubierta y al piso del filón a unas profundidades de 45′ y 75′ respectivamente. Escala: 1″ = 100′. *Resp.* Rumbo = N 44° E, buzamiento = 36°, espesor = 25′

31. Usando los datos del problema 29, determine el rumbo, el buzamiento y el espesor del estrato, si el pozo de sondeo que parte de C llega a la cubierta y al piso del filón a unas profundidades de 35′ y 60′ respectivamente. Escala: 1″ = 100′. *Resp.* Rumbo = N 47° E, buzamiento = 34°30′, espesor = 23′

32. En cada uno de los siguientes problemas se dan ciertos datos topográficos. Utilizando el método del geólogo determine el dato que falta.

(*a*) Dado: Rumbo = N 60° O, buzamiento verdadero = 45°N E, dirección del buzamiento aparente = exact. hacia el este. Encuentre el buzamiento aparente.

(*b*) Dado: Rumbo = N 30° O, dirección del buzamiento aparente = S 40° O, buzamiento aparente = 45°. Encuentre el buzamiento verdadero.

(*c*) Dado: Rumbo = N 30° E, buzamiento verdadero = 45° SO, dirección del buzamiento aparente = N 30° O. Encuentre el buzamiento aparente.

(*d*) Dado: Rumbo = N 60° E, dirección del buzamiento aparente = S 75° E, buzamiento aparente = 35°. Encuentre el buzamiento verdadero.

(*e*) Dado: Rumbo = exactamente hacia el norte; buzamiento verdadero = 30°, dirección del buzamiento aparente = N 30° E. Encuentre el buzamiento aparente. *Resp.* (*a*) 26°30′, (*b*) 47° SO, (*c*) 41°, (*d*) 44°30′, (*e*) 16°

33. Construya la Fig. 9-24 y dibuje un perfil a lo largo de la línea media, XY, la cual representa una carretera horizontal a 130′ de altura. Señale las áreas de desmonte y de terraplén por medio de sombras que contrasten. Escala: 1″ = 40′.

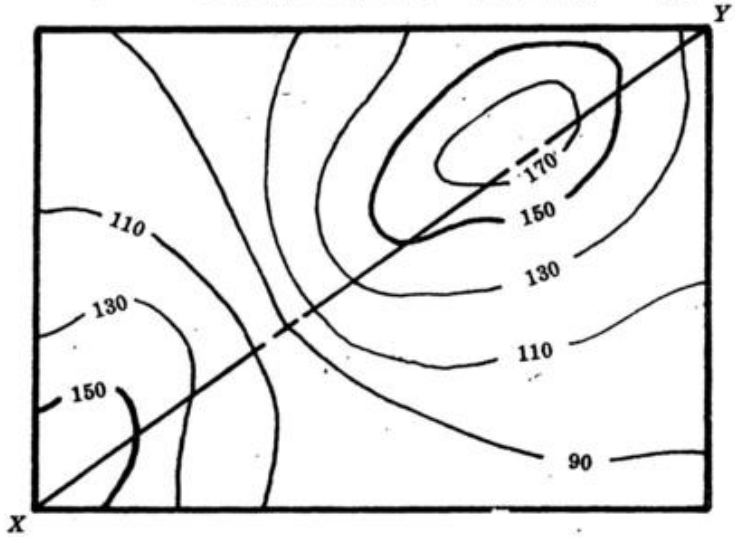


Fig. 9-24

34. La Fig. 9-25 muestra un mapa topográfico, cuyas distancias verticales entre los planos de nivel son 10'. Se pide localizar una carretera curva, cuya línea media sea un arco de 150' de radio, con centro en *X*. La carretera tiene un ancho de 30' y una altura constante de 260'. Usando una pendiente de $1\frac{1}{2}$:1 tanto para desmontes como para terraplenes, trace las líneas de desmontes y terraplenes. Escala: 1" = 50'.

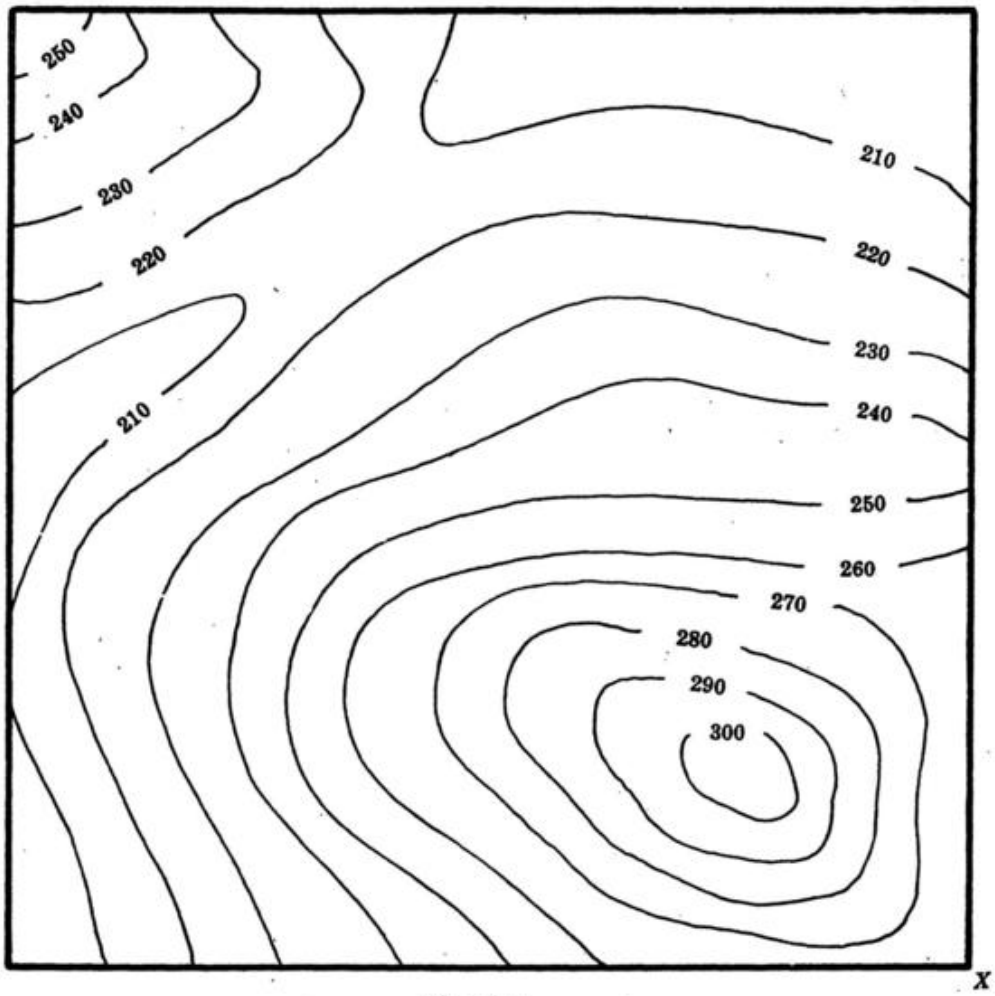


Fig. 9-25

35. Usando los mismos datos del problema 34, construya un perfil a lo largo de la línea media de la carretera.

Capítulo 10

Geometría vectorial

Las cantidades físicas se pueden dividir en dos grupos: escalares y vectoriales. Cantidades escalares son aquellas tales como la temperatura, el volumen y el tiempo, que tienen únicamente magnitud, mientras que las cantidades vectoriales son aquellas, tales como la fuerza, la velocidad y la aceleración, que tienen magnitud y dirección.

En ingeniería se encuentran, con frecuencia, problemas relacionados con vectores, y hay dos métodos disponibles para solucionarlos: el uno por medio de las matemáticas y el otro gráficamente.

Las soluciones gráficas de los problemas con vectores presentan algunas ventajas que hacen del método gráfico una ayuda muy valiosa. Podemos sintetizar estas ventajas así: La solución gráfica elimina cálculos complejos, con frecuencia proporciona un ahorro considerable de tiempo y hace el problema más fácil de comprender. Además, la exactitud lograda con este tipo de solución es suficiente en la mayoría de los problemas relacionados con vectores.

10.1 DEFINICIONES

(*1*) *Vector* — un segmento de línea que representa una cantidad vectorial. Como ésta, tiene dirección y longitud.

(2) *Línea de acción* — línea sobre la cual está situado el vector, coincidiendo con ella. El vector "actúa" a lo largo de esta dirección.

(*3*) *Vectores concurrentes* — vectores cuyas líneas de acción se cortan en un punto común.

(*4*) *Vectores no concurrentes* — vectores cuyas líneas de acción no se cortan.

(*5*) *Vectores coplanares* — vectores situados en el mismo plano.

(*6*) *Vectores no coplanares* — vectores que *no* están situados en el mismo plano.

(*7*) *Resultante* — vector que se obtiene sumando dos o más vectores. Puede remplazar, simultáneamente, los vectores sumados, produciendo el mismo efecto que estos.

(*8*) *Equilibrante* — vector que se necesita para mantener el equilibrio entre dos o más vectores. Este vector coincide con el vector resultante de los vectores dados en su magnitud y posición, pero su dirección es opuesta.

(*9*) *Diagrama de fuerzas* — diagrama no hecho a escala, que muestra únicamente la dirección y la posición de los vectores.

(*10*) *Diagrama vectorial* — diagrama que muestra la suma o resolución de vectores, con los vectores dibujados en su dirección y magnitud verdaderas.

(*11*) *Tensión* — fuerza que tiende a estirar o alargar un objeto.

(*12*) *Compresión* — fuerza que tiende a comprimir o estrechar un objeto.

10.2 PRINCIPIOS FUNDAMENTALES SOBRE VECTORES

(*1*) El principio de la transmisibilidad expresa que un vector puede actuar en cualquier lugar, a lo largo de su línea de acción, sin que cambie el efecto producido por él. (Ver el problema resuelto 2.)

(2) Dos vectores concurrentes o paralelos son siempre coplanares, mientras que tres o más vectores pueden o no serlo.

(3) Cada uno de los vectores en el diagrama vectorial, debe ser paralelo a su vector correspondiente en el diagrama de fuerzas.

(4) El diagrama vectorial de varias fuerzas que actúan sobre un punto y están en equilibrio, debe ser una figura cerrada, con los vectores situados extremo con extremo, en dirección continua. Esto significa que la punta del último vector sumado debe tocar justamente la cola del vector inicial, cuando los vectores se han sumado por el método del polígono, esto es, puntas con colas. Esto garantiza que todas las fuerzas se cancelan, no quedando ninguna fuerza efectiva que actúe en el punto, es decir, el sistema realmente está en equilibrio.

(5) Para los problemas que tratan de equilibrio en un punto, se adopta la siguiente convención: un vector colocado sobre un elemento que señale en una dirección que se aleje del punto, implica una tensión del elemento y un vector que señale en dirección hacia el punto, implica una compresión del elemento.

10.3 RESULTANTE DE VECTORES COPLANARES CONCURRENTES

Comúnmente se usan dos métodos: El método del paralelogramo y el método del polígono. Este último requiere menos líneas de construcción y generalmente se prefiere. En los ejemplos dados a continuación se han hallado soluciones por ambos métodos.

A. Método del paralelogramo

Análisis: El resultante de dos vectores cualesquiera, colocados cola con cola, es la diagonal de un paralelogramo construido con los dos vectores como lados.

Ejemplo: En la Fig. 10-1(*a*) se da el diagrama de fuerzas de tres fuerzas ($A = 50\#$, $B = 180\#$, $C = 90\#$) y se pide encontrar la resultante.

En la Fig. 10-1(*b*) tome la longitud correcta de cada vector (determinada por su magnitud) sobre la línea de acción correspondiente, desde el punto de intersección Q, utilizando una escala conveniente. Observe que A y B forman dos lados de un paralelogramo; complete el paralelogramo trazando una línea paralela a B por la punta de A y una línea paralela a A por la punta de B. Trace la diagonal desde el punto Q; ésta es la resultante R_1 de A y B. Construya un segundo paralelogramo con R_1 y el vector que queda, C, como lados, y trace su resultante, R_2. R_2 es el resultante de A, B y C, que se pide y es la única fuerza que puede remplazar las tres dadas.

Resp. $R_2 = 140\#$, en la dirección que se muestra.

El vector equilibrante de A, B y C se representaría por un vector situado a lo largo de la diagonal R_2, pero de dirección opuesta: Esta es una fuerza que equilibra exactamente a A, B y C.

Nota: El orden en que se suman los vectores es indiferente, pero los vectores deben colocarse siempre, cola con cola, en este método.

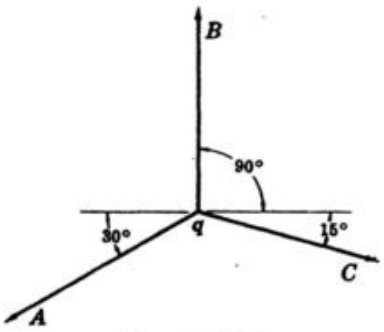


Fig. 10-1(*a*)

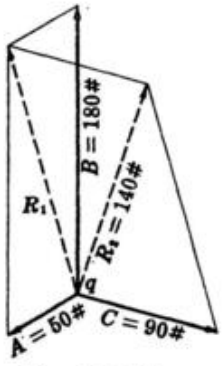


Fig. 10-1(*b*)
Resultante hallada por el método del paralelogramo

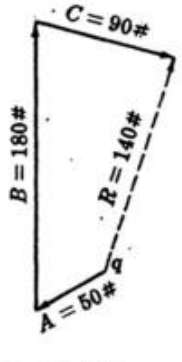


Fig. 10-1(*c*).
Resultante hallada por el método del polígono

B. Método del polígono

Análisis: Construya el polígono, colocando los vectores uno a continuación de otro, haciendo coincidir la cola del vector que se suma con la punta del último vector sumado. Dibuje el último lado del polígono desde la cola del primer vector hasta la punta del último vector sumado. Este último lado será el resultante.

Ejemplo: El mismo problema estudiado anteriormente. En la Fig. 10-1(*c*), escoja una escala conveniente y trace *A* a escala, a partir del punto *Q*. Ahora trace *B* (la dirección de *B* permanece invariable) haciendo coincidir su cola con la punta de *A* y de forma similar una *C* con *B*. El resultante *R* se traza desde la cola de *A* hasta la punta de *C* y está en esa dirección. Esto nos da la magnitud y la dirección del resultante. *Resp.* $R = 140\,\#$

10.4 RESULTANTE DE VECTORES COPLANARES NO CONCURRENTES

A. Método de las líneas de acción

Análisis: Mueva dos vectores a lo largo de sus líneas de acción hasta el punto común de intersección y encuentre el resultante por el método del paralelogramo. Utilizando este resultante y un vector que no se haya utilizado, continúe el proceso hasta que quede únicamente el vector resultante final.

Ejemplo: En la Fig. 10-2 se dan tres fuerzas ($A = 20\#$, $B = 15\#$, $C = 25\#$) que actúan sobre un tablón y se pide encontrar su resultante y la posición de ésta.

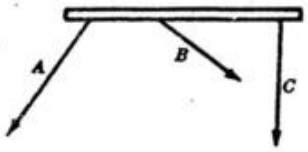
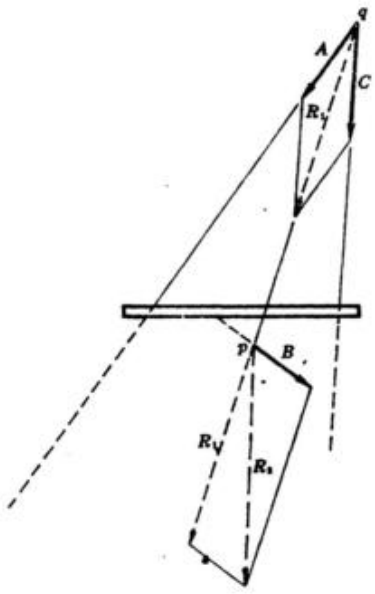


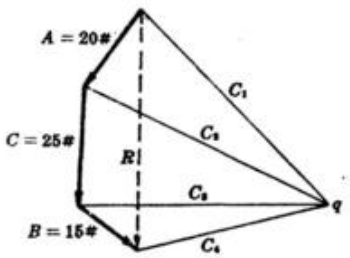
Fig. 10-2

En la Fig. 10-3 deslice *A* y *C* (se han escogido arbitrariamente) a lo largo de sus líneas de acción, hasta que se encuentren en su punto de intersección, *Q*. Escoja una escala adecuada y señale la longitud verdadera de cada uno de los vectores que parten de *Q* y encuentre el resultante R_1 por el método del paralelogramo. Ahora deslice R_1 y el vector que queda, *B*, a lo largo de sus líneas de acción hasta que sus colas estén simultáneamente en el punto común de intersección, *P*. Dibujando ambos vectores en sus verdaderas longitudes, use nuevamente el método del paralelogramo para encontrar R_2, el vector resultante de *A*, *B* y *C*. Ahora sabemos la magnitud, la posición y la dirección del resultante. *Resp.* $R_2 = 50\#$

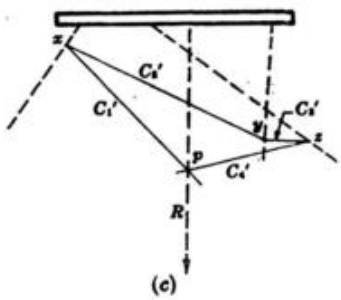
Este método es bueno para líneas de acción que se cortan prontamente, pero para las líneas de acción paralelas o casi paralelas, la intersección se sale de los límites del dibujo, y se necesita un método más general para determinar la posición del resultante.



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Fig. 10-3

B. Método del polígono componente

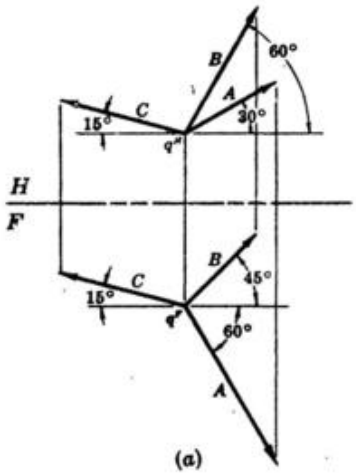
Análisis: La magnitud y la dirección del resultante se encuentra sencillamente, utilizando el método del polígono en un diagrama vectorial. Para encontrar su posición trace líneas de construcción, en el diagrama vectorial, desde la punta y la cola de cada

vector hasta un punto Q, situado al lado derecho. Paralelas a las líneas de construcción que tocan dos vectores primitivos, trace líneas de construcción entre las líneas de acción de estos dos vectores, en el diagrama de fuerzas, formando parte de un polígono. Cierre el polígono, trazando líneas de construcción paralelas a las líneas de construcción que tocan únicamente un vector primitivo, a partir de las líneas de acción de los vectores correspondientes en el diagrama de fuerzas. La intersección de estas dos últimas líneas es un punto situado sobre la línea de acción del resultante.

Ejemplo: El mismo problema tratado anteriormente. En la Fig. 10-3(*b*) se dibuja el diagrama vectorial (método del polígono) y las líneas de construcción que van hasta el punto Q. Observe que C_2 y C_3 tocan dos vectores. C_2 toca a A y a C. Por tanto, paralela a C_2, trace C_2' en el diagrama de fuerzas (*c*) entre las líneas de acción de A y de C, partiendo de un punto cualquiera X, situado sobre la línea de acción de A. Trace C_3', de manera similar, a partir del punto recién encontrado Y. Puesto que C_1 toca únicamente a A y C_4 toca únicamente a B, a partir de X trace C_1', paralela a C_1 y a partir del punto Z trace C_4', paralela a C_4. La intersección de C_1' y C_4', punto P, está situada sobre la línea de acción del resultante debido a que tanto C_1 como C_4 tocan el resultante en (*b*). Compare la posición del resultante con la que se encontró utilizando el otro método. *Resp.* $R = 50\#$

10.5 RESULTANTE DE VECTORES CONCURRENTES NO COPLANARES

Análisis: Puesto que estos vectores no están situados todos en el mismo plano, necesitamos dos vistas para determinar sus posiciones. Completando el diagrama vectorial en cada una de las vistas obtendremos dos vistas del resultante, de las cuales podemos obtener la longitud verdadera del vector resultante y de aquí su magnitud.



Ejemplo: En la Fig. 10-4(*a*) se dan tres vectores fuerza ($A = 250\#$, $B = 150\#$, $C = 170\#$) en un diagrama de fuerzas y se pide encontrar el resultante.

Antes de que se pueda completar el diagrama vectorial, necesitamos obtener la longitud verdadera de cada vector con el fin de establecer su longitud definitiva en cada una de las vistas del diagrama vectorial. Así, en la Fig. 10-4(*b*) a partir del punto Q trace una línea paralela a A, en cada una de las vistas. Escoja un punto X sobre esta línea y obtenga la longitud verdadera de QX en la vista inclinada 1. En esta vista tome 250 # sobre A, su magnitud. Proyecte esta distancia a la vista frontal y a la vista de planta; de este modo obtenemos la longitud de A en cada vista. Utilizando el método del polígono, por la punta de A

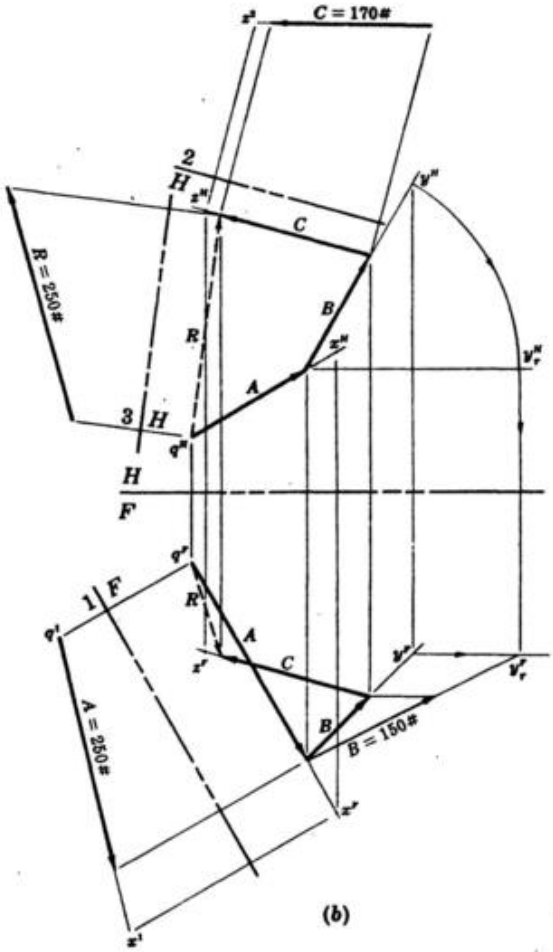


Fig. 10-4. Resultante de tres vectores no coplanares, hallada por el método del polígono

trace una línea paralela a B, en ambas vistas. En este caso utilice el punto Y y gire la línea para determinar su verdadera longitud; sobre la longitud verdadera de la línea tome 150#. Proyecte esta distancia a la vista frontal y a la vista de planta, para obtener la longitud de B en cada una de las vistas. Por la punta de B trace ahora una línea paralela a C, en ambas vistas y obtenga la longitud verdadera de esta línea, utilizando el punto Z. Sobre la línea en verdadera longitud tome 170#. Proyecte esta distancia a la vista de planta y a la vista frontal y complete el polígono en cada una de las vistas del diagrama vectorial, dibujando una línea de trazos desde el punto Q hasta la punta de C. Este vector es el resultante. Construya una vista de elevación auxiliar 3 para encontrar su longitud verdadera y, por tanto, su magnitud. *Resp.* $R = 250\#$

Nota: El método del paralelogramo también podría haberse usado en las dos vistas del diagrama vectorial.

10.6 DESCOMPOSICION DE UN VECTOR EN DOS COMPONENTES COPLANARES

Cualquier vector se puede descomponer en dos componentes coplanares de dirección especificada, y ser remplazado por ellos. Este proceso se denomina descomposición.

Análisis: Forme un paralelogramo con el vector dado como diagonal y dos lados a lo largo de las direcciones de las componentes. Estos dos lados representan las componentes de la fuerza en las direcciones especificadas.

Ejemplo: Se da una fuerza de 1000# actuando sobre un bloque, como se muestra en la Fig. 10-5(*a*) y se pide encontrar las fuerzas que actuando a lo largo de las líneas QM y QN pueden remplazar la fuerza dada.

Escoja una escala conveniente y mida 100# a lo largo de la línea de fuerza, en (*b*). Prolongue las líneas QM y QN hasta que una línea paralela a QM trazada desde la punta del vector de 1000# corte a QN y una línea paralela a QN trazada desde esta misma punta del vector de 1000# corte a QN. La distancia QX representa la componente de la fuerza en la dirección QM y QY es la componente de la fuerza en la dirección QN.

Resp. $QX = 1050\#$, $QY = 505\#$

En los casos que tratan de equilibrio alrededor de un punto, utilizamos otro método similar al que expusimos anteriormente. Por la punta y la cola del vector fuerza dado, trace líneas paralelas a las componentes, como se muestra en (*c*). De este modo se forma un triángulo cerrado, determinando la fuerza componente en cada dirección. Observando el principio fundamental 4 dibuje los vectores en dirección continua. Así obtenemos la magnitud y la dirección de cada una de las fuerzas necesarias para mantener el bloque en reposo.

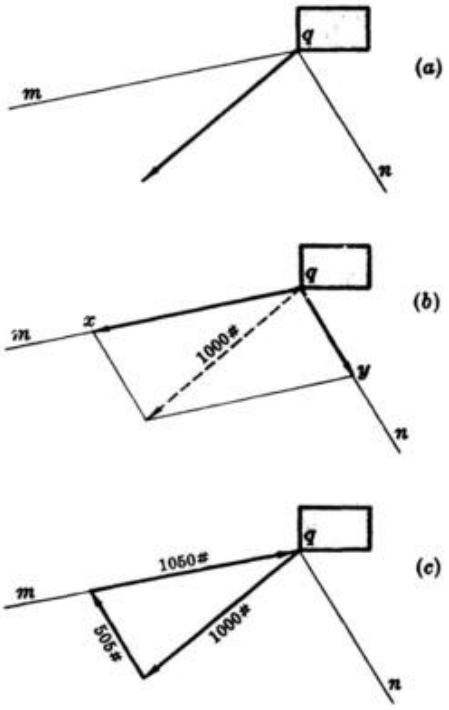


Fig. 10-5.
Descomposición de una fuerza en dos componentes coplanares

10.7 DESCOMPOSICION DE UN VECTOR EN TRES COMPONENTES CONCURRENTES NO COPLANARES

Cualquier vector situado en el espacio puede ser descompuesto en tres componentes concurrentes de direcciones especificadas y ser remplazado por ellos. Hay dos métodos usados comúnmente y cada uno de ellos tiene su ventaja en casos especiales. En este capítulo incluimos soluciones halladas por ambos métodos.

A. Método de la vista de filo del plano

Análisis: Obtenga la vista de filo del plano formado por dos componentes desconocidas —generalmente fuerzas. Esto permite descomponer la fuerza en sólo dos componentes, en esa vista del diagrama vectorial, lo cual se hace fácilmente. Una de esas dos componentes representa las dos fuerzas desconocidas que aparecen

como un filo. Divida esta componente en las dos fuerzas correspondientes, con la ayuda de otra vista, en el diagrama vectorial. Obtenga la longitud verdadera de cada componente para encontrar la magnitud real de la respectiva fuerza. (Observe los principios fundamentales 3, 4 y 5.)

Ejemplo: En la Fig. 10-6(*a*) se da un trípode que soporta una carga vertical de 250 # y se pide encontrar la fuerza que se ejerce sobre cada pata.

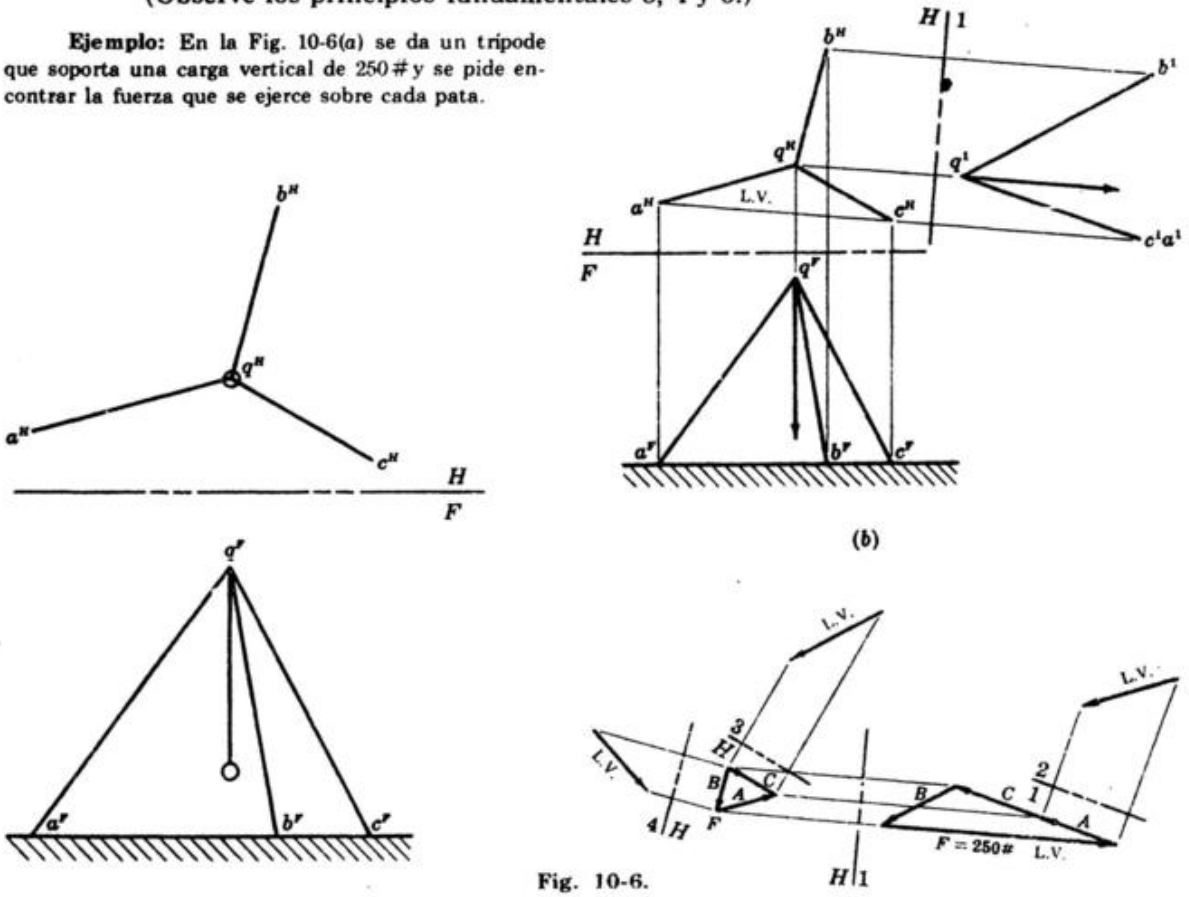


Fig. 10-6.
Descomposición de una fuerza en tres componentes no coplanares
(Método de la vista de filo del plano)

Puesto que la línea AC es una línea de nivel, aparecerá en su verdadera longitud en la vista de planta. Ver la Fig. 10-6(*b*). Trace la línea de pliegue H-1 perpendicular a AC, de modo que las patas QA y QC aparezcan superpuestas en la vista de elevación auxiliar 1. Ahora, en el diagrama vectorial (*c*) dibuje la fuerza conocida, F, en la vista de planta y en la vista de elevación auxiliar 1 y escogiendo una escala adecuada, mida 150 # sobre la línea de fuerza en la vista 1, puesto que esta línea aparece en su verdadera longitud en esta vista. En la vista 1 la fuerza puede descomponerse a lo largo de dos líneas, trazando lados paralelos a las componentes de las fuerzas mostradas en la vista auxiliar de (*b*). Recuerde que el diagrama vectorial de un sistema en equilibrio debe ser una figura cerrada, con los vectores sumados en dirección continua. En consecuencia, las fuerzas tomadas en direcciones opuestas a las que actúan a lo largo de las patas equilibran exactamente la fuerza producida por la carga. En la vista de planta de (*c*) determine también el vector B, la fuerza componente que actúa a lo largo de la pata QB. El punto de separación entre A y C (las fuerzas componentes que actúan en las patas QA y QC respectivamente) es todavía desconocido en la vista auxiliar 1, pero sabemos que A y C están situados extremo con extremo, desde la punta de F hasta la cola de B, en esta vista. Por tanto, en la vista de planta trace desde la punta de F y la cola de B líneas paralelas a las patas QA y QC mostradas en la vista de planta de (*b*). La intersección de estas líneas completa el polígono en la vista de planta, determinando el punto de separación de las fuerzas A y C, el cual se halla en la vista 1 por proyección. De nuevo, los vectores se deben dibujar en dirección continua, en ambas vistas. Encuentre la magnitud de la fuerza ejercida en cada pata, construyendo vistas que muestren sus verdaderas longitudes.

Resp. $A = 105$ # $\quad B = 88$ # $\quad C = 110$ #

Observe que el vector B, colocado en la pata QB, apunta hacia el punto Q, alrededor del cual se tomó el equilibrio. Por tanto observe que todas las fuerzas son de compresión.

Ejemplo 2: Resolver el problema anterior, usando la notación de Bow.

En la Fig. 10-7(*a*) una vez que haya completado el diagrama de fuerzas observe que la fuerza vertical aparece como un punto en la vista de planta. Desvíe esta fuerza hacia un lado (nunca entre las dos componentes que aparecen superpuestas —en este problema, *QA* y *QC*) para facilitar su notación. En la vista de planta (únicamente) coloque letras mayúsculas alrededor del punto de equilibrio *Q*, en cada uno de los espacios existentes entre la fuerza y la estructura, así como también entre dos miembros cualesquiera de la estructura (la notación de Bow se debe utilizar únicamente en una vista). Ahora dibuje una flecha para indicar en qué dirección se deben leer las fuerzas, alrededor del punto de equilibrio (esta dirección es arbitraria). Con la flecha dibujada como se muestra, la fuerza vertical se lee *XT*, la fuerza ejercida en la pata *QB* se lee *TV*, etc. Si invirtiéramos la dirección de la flecha, la fuerza ejercida en la pata *QB* se leería *VT*, la fuerza vertical se leería *TX*, etc.

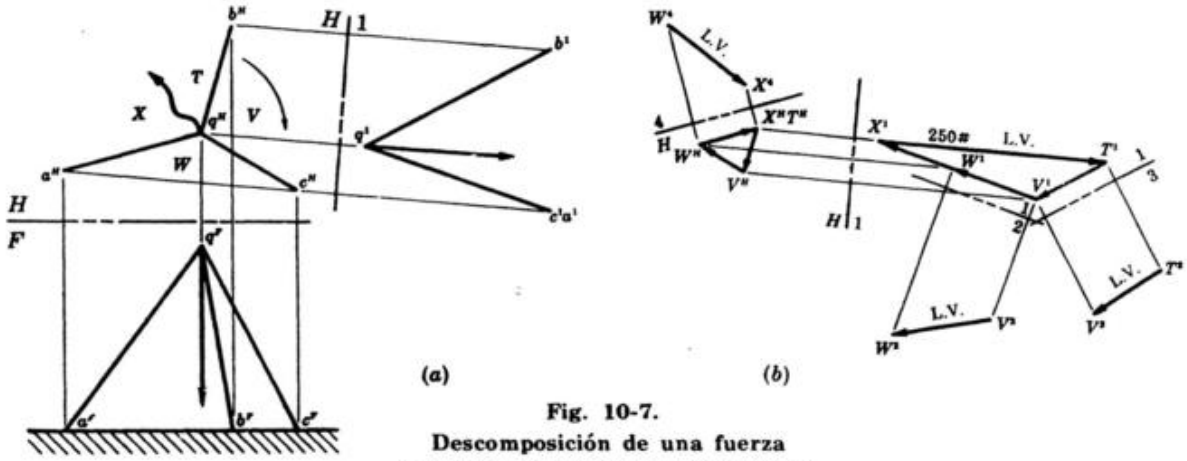


Fig. 10-7.
Descomposición de una fuerza en tres componentes no coplanares, utilizando la notación de Bow

Ahora en el diagrama vectorial, Fig. 10-7(*b*), dibuje la única fuerza que se conoce —la carga vertical— en la vista de planta y en la vista de elevación auxiliar. Puesto que esta fuerza se lee *XT* por la notación de Bow, llame *X* el origen y *T* el extremo. Por la dirección de la flecha, el vector *TV* es el siguiente. Por tanto, a partir de *T*, en cada una de las vistas de (*b*), trace una línea paralela a *QB*, con la dirección que tenga ésta en la correspondiente vista de (*a*). El punto *V* es aún desconocido. Observe que los vectores que quedan, *VW* y *WX* están situados a lo largo de una línea recta en la vista 1 de (*a*); complete el triángulo en la vista de elevación de (*b*), dibujando estos vectores como una línea recta que parte de *X* y es paralela a *QAC*, mostrada en la vista de elevación de (*a*). De este modo se determina el punto *V*, permaneciendo desconocido únicamente el punto *W*. Ahora, en la vista de planta de (*b*) trace a partir de *X* una línea paralela a *WX* —mostrada en la vista de planta de (*a*) — y a partir de *V* una paralela a *VW*— también mostrada en la vista de planta de (*a*). La intersección de estas dos líneas determina el punto *W*, que puede proyectarse a la vista 1 para determinar las longitudes de *VW* y *WX* en esa vista. Dibuje los vectores en dirección continua y obtenga la longitud verdadera de cada vector con el fin de determinar las magnitudes reales de los esfuerzos. *Resp.* $A = 105\#$ $B = 88\#$ $C = 110\#$

B. Método de la vista de punta de la línea

Análisis: Obtenga una vista en que una componente desconocida aparezca como un punto. Esto permite descomponer la fuerza conocida en sólo dos componentes, en esta vista del diagrama vectorial. Como en el método anterior, utilice una vista relacionada en el diagrama vectorial para completar la resolución. Obtenga las longitudes verdaderas para encontrar las magnitudes reales.

Ejemplo: El mismo problema resuelto anteriormente. Antes de que se pueda obtener la vista de punta de una línea, debemos mostrar la línea en su verdadera longitud. Con este fin, en la Fig. 10-8(*a*) dibuje una vista de elevación auxiliar 1 para obtener la longitud verdadera de *QB*. Coloque la línea de pliegue 1-2 perpendicular a *QB*, obteniendo *QB* como un punto en la vista 2. El problema se reduce ahora a descomponer la fuerza en dos componentes en esta vista. En el diagrama vectorial (*b*) establezca la fuerza *F* tanto en la vista 1 como en la vista 2. Puesto que esta fuerza aparece en su verdadera longitud en la vista 1, tome 250# sobre la línea en esta vista. Descomponga esta fuerza en dos componentes, en la vista 2, trazando líneas paralelas a las componentes mostradas en la vista 2 de (*a*). En la vista 1 de (*b*) trace los vectores *A* y *C* —las fuerzas componentes que se ejercen sobre las patas *QA* y *QC* respectivamente— proyectándolos desde la vista 2. Obtenga la componente *B*, completando el polígono en la vista 1. Puesto que *B* aparece como un punto en la vista 2, debe tener su longitud verdadera en la

vista 1. Los vectores se deben dibujar en dirección continua en las dos vistas del diagrama vectorial. Los vectores *A*, *B* y *C*, cuando están colocados en sus respectivos miembros, todos apuntan hacia el punto de equilibrio. Por tanto, todos los esfuerzos sobre las patas son de compresión. De nuevo, las líneas en longitud verdadera —como en el método anterior— determinan las magnitudes reales de *A*, *B* y *C*.
Resp. $A = 105\#$ $B = 88\#$ $C = 110\#$

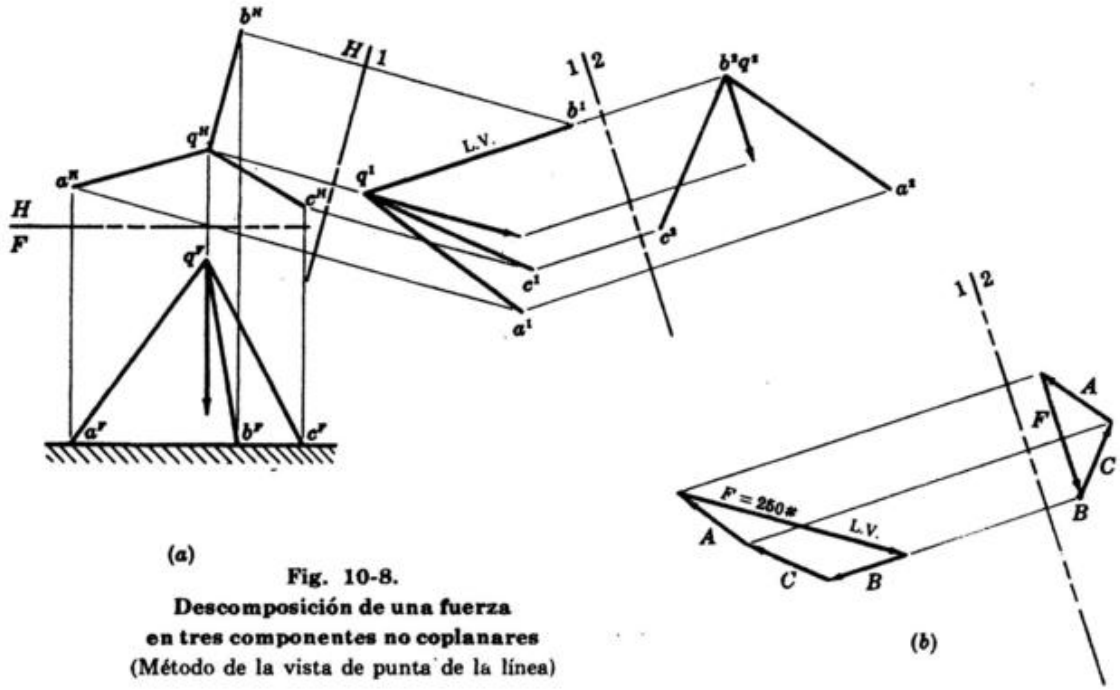


Fig. 10-8.
Descomposición de una fuerza en tres componentes no coplanares
(Método de la vista de punta de la línea)

Problemas resueltos

1. **Dado:** Fig. 10-9(*a*). El diagrama de fuerzas muestra dos fuerzas coplanares ($A = 10\#$, $B = 25\#$) que actúan en el punto *Q*. Use la escala vectorial: $1'' = 20\#$.
Problema: Encuentre la fuerza resultante que actúa en el punto *Q*.

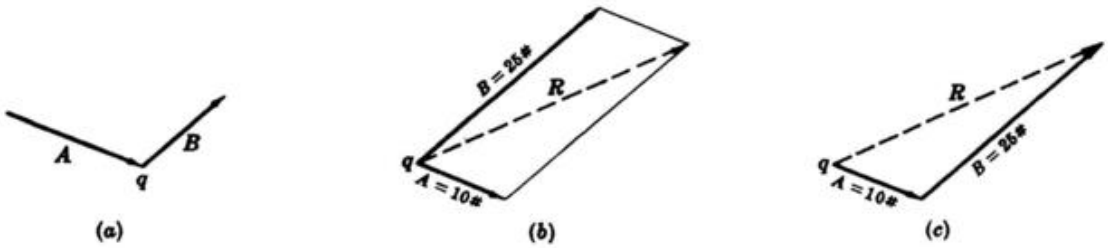


Fig. 10-9

Solución:

Método del paralelogramo. Ver la Fig. 10-9(*b*). Deslice *A* a lo largo de su línea de acción hasta que su cola esté también en *Q*. Dibuje *A* y *B* a escala y complete el paralelogramo. Dibuje la diagonal desde el punto *Q*. Esta es la fuerza resultante que actúa en el punto *Q*, en la dirección que se muestra.

Método del polígono. Ver la Fig. 10-9(*c*). Deslice *A* a lo largo de su línea de acción hasta que su cola esté también en el punto *Q*. Tome la longitud de *A*, a escala, y dibuje *B*, también a escala, desde la punta de *A*. Trace una línea desde la cola de *A* (punto *Q*) hasta la punta de *B*. Esta línea es la fuerza resultante que actúa en el punto *Q*, en la dirección mostrada. *Resp.* Resultante = 31,3#

2. Dado: Fig. 10-10(*a*). El diagrama de fuerzas de dos fuerzas coplanares ($A = 12\#$, $B = 8\#$) que actúan sobre un bloque, como se muestra. Use la escala vectorial: $1'' = 10\#$.
Problema: Encuentre la resultante y su línea de acción.

(*a*) (*b*)

Fig. 10-10

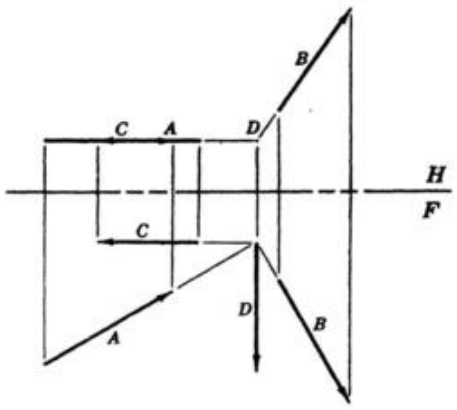
Solución:

Ver la Fig. 10-10(*b*). Puesto que cada uno de los vectores puede actuar en cualquier punto, a lo largo de su línea de acción, mueva ambos vectores hasta que sus colas estén, a un tiempo, en el punto común de intersección Q. Ahora los vectores pueden ser sumados. Dibuje A y B a escala y complete el paralelogramo. El resultante se representa por la diagonal trazada desde el punto Q. Por tanto, Q es un punto situado sobre la línea de acción del resultante. *Resp.* Resultante = 7,9#

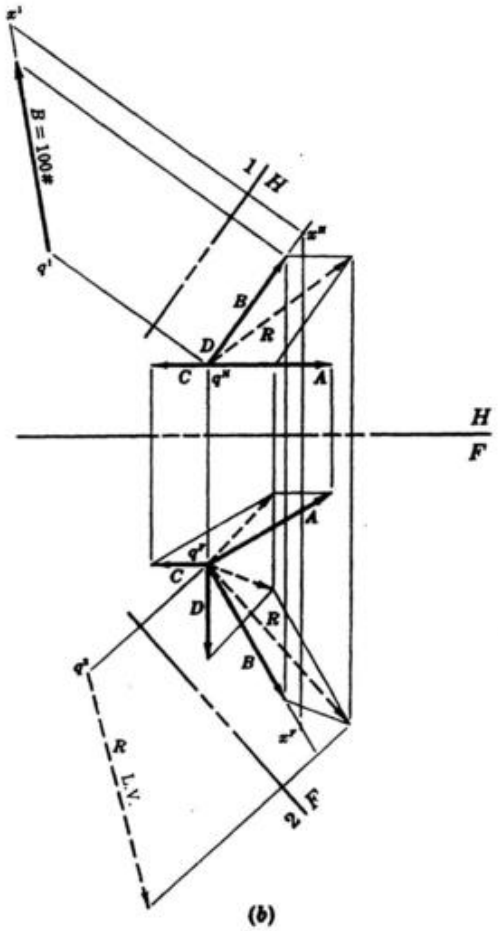
3. Dado: Fig. 10-11(*a*). El diagrama de fuerzas que muestra cuatro fuerzas no coplanares ($A = 75\#$, $B = 100\#$, $C = 30\#$, $D = 50\#$). Utilice la escala vectorial: $1'' = 100\#$.
Problema: Encuentre la resultante, utilizando el método del paralelogramo y luego el método del polígono.

Solución:

Método del paralelogramo. Ver la Fig. 10-11(*b*). Deslice los vectores a lo largo de sus líneas de acción hasta que sus colas estén simultáneamente en el punto común de intersección, Q. Los vectores A, C y D aparecen en sus longitudes verdaderas en la vista frontal;



(*a*)



(*b*)

Fig. 10-11

por tanto, dibújelos a escala en esta vista. Escoja un punto X sobre la línea de acción de B. Obtenga la longitud verdadera de QX en la vista de elevación auxiliar 1. Sobre esta línea en verdadera longitud mida 100# y proyecte a las otras dos vistas para obtener la longitud de B en ellas. Construya paralelogramos en ambas vistas hasta que quede únicamente el resultante final. Construya la vista inclinada 2 para obtener su longitud verdadera.

Método del polígono. Ver la Fig. 10-11(c). Dibuje el vector A en ambas vistas, tomándolo a escala en la vista frontal. En las dos vistas trace una línea paralela a B a partir de la punta de A; escoja un punto X sobre esta línea y dibuje una vista de elevación auxiliar 1 para obtener XY en su verdadera longitud. Mida 100# sobre esta línea, a partir de Y, y proyecte esta distancia a las otras dos vistas. Ahora, en la vista de planta y en la vista de elevación frontal, dibuje C a partir de la punta de B y señale su longitud, a escala, en cualquiera de las dos vistas. Similarmente, trace D a partir de la punta de C y señale su longitud, a escala, en la vista frontal. Trace el resultante desde el punto Q hasta la punta de D y construya una vista inclinada 2 para obtener su verdadera longitud.

Resp. Resultante = 125 #

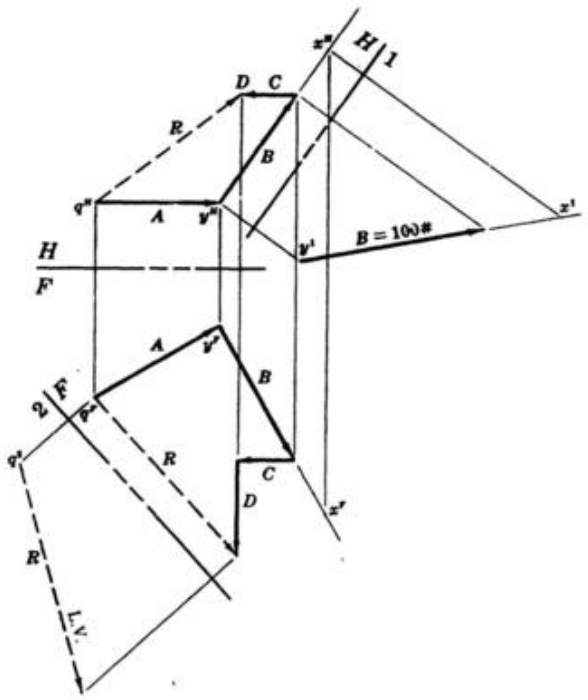


Fig. 10-11(c)

4. Dado: La Fig. 10-12(*a*) muestra el diagrama de fuerzas de tres fuerzas coplanares (A = 70#, B = 90#, C = 60#). Utilice la escala vectorial: 1" = 100#.

Problema: Encuentre la resultante, sus componentes vertical y horizontal y su línea de acción por el método del polígono componente.

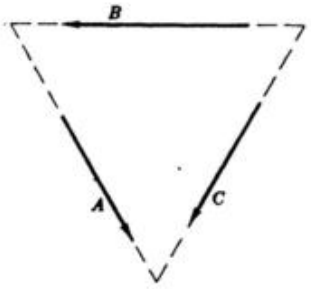
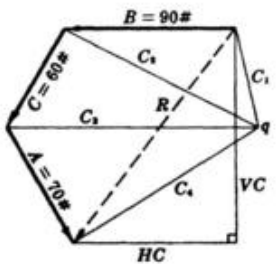


Fig. 10-12(*a*)

Solución:

Ver la Fig. 10-12(*b*). Construya un diagrama vectorial a escala. Encuentre las componentes vertical y horizontal de la resultante trazando una línea vertical desde la cola y una línea horizontal desde la punta de la resultante. Trace líneas desde los extremos de los vectores hasta el punto Q. Desde un punto X, situado sobre la línea de acción de B en el diagrama de fuerzas, trace C_2' paralela a C_2. Similarmente trace C_3' desde el punto recién encontrado Y, determinando el punto Z. Encuentre el punto de intersección P de las líneas C_1' y C_4', trazadas desde X y Z, respectivamente. P está situado sobre la línea de acción de R.

Resp. Resultante = 142#, componente horizontal = 86#, componente vertical = 113#



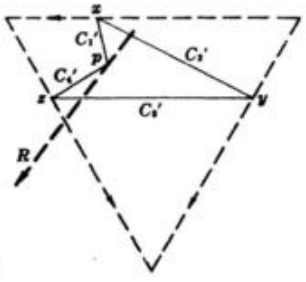


Fig. 10-12(*b*)

5. **Dado:** La Fig. 10-13(*a*). El diagrama de fuerzas que muestra cuatro cargas que descansan sobre una barra de peso despreciable. ($A = 25\#$, $B = 30\#$, $C = 15\#$, $D = 40\#$). Use la escala vectorial: $1'' = 40\#$ y la escala de espacios: $1'' = 4'$.

Problema: Encuentre la magnitud y la posición de una carga única que pueda remplazar a las cuatro cargas dadas, produciendo el mismo efecto.

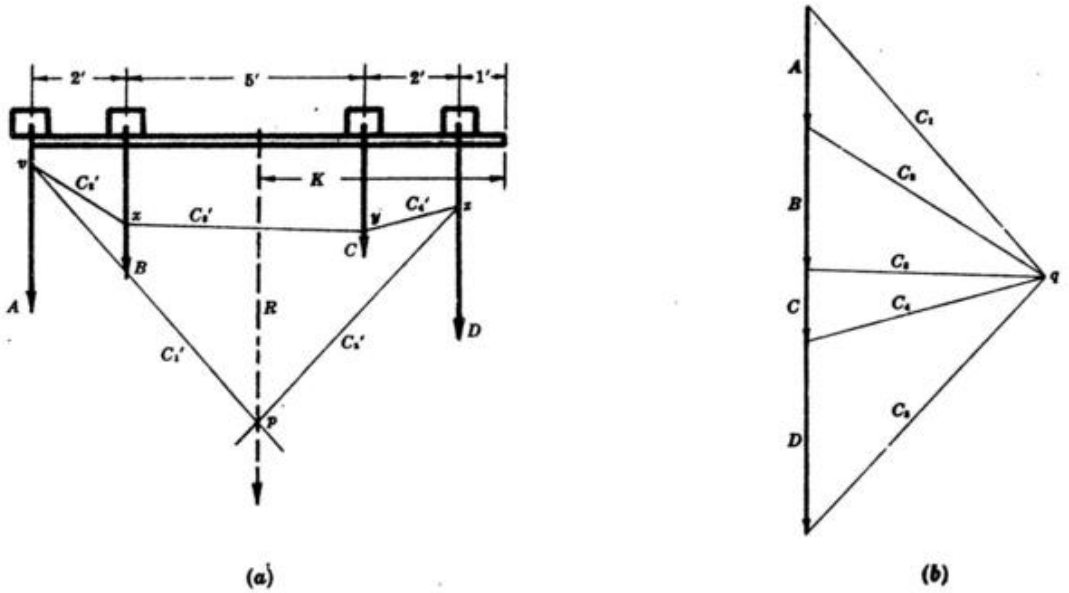


Fig. 10-13

Solución:

Ver la Fig. 10-13(*b*). Puesto que las fuerzas individuales son paralelas, la resultante será sencillamente la suma de las cargas. Dibuje el diagrama vectorial, tomando los vectores a escala. Trace líneas desde los extremos de cada vector hasta el punto Q. Trace C_2' paralela a C_2 a partir de un punto V situado sobre la línea de acción de A. Similarmente, trace C_3' desde el punto recién determinado X y C_4' desde el punto Y. Encuentre el punto de intersección P de C_1', trazado desde V y C_5', trazado desde Z. El punto P está situado sobre la línea de acción de la resultante R, cuya magnitud y dirección ya han sido determinadas en el diagrama vectorial. *Resp.* Resultante = 110#, distancia $K = 5'—3''$

6. **Dado:** Tres fuerzas ($A = 600\#$, $B = 800\#$, $C = 750\#$) actúan sobre un puente de armadura, como se muestra en la Fig. 10-14(*a*). Utilice la escala vectorial: $1'' = 1000\#$ y la escala de espacios: $1'' = 20'—0''$.

Problema: Determine la reacción en las columnas de soporte.

Solución:

Ver la Fig. 10-14(*b*). Dibuje a escala los vectores en un diagrama vectorial y trace líneas desde los extremos de cada vector hasta el punto Q. En el diagrama de fuerzas trace C_2' paralela a C_2 desde un punto cualquiera X situado sobre la línea de acción de A. Similarmente trace C_3' a partir del punto recién encontrado Y. Encuentre el punto de intersección P de C_1', trazada desde X y C_4' trazada a partir de Z. A través de P trace la línea de acción del resultante, encontrado en el diagrama vectorial. Ahora vuelva atrás para trabajar con la resultante y las componentes horizontal y vertical de las fuerzas en las columnas de soporte. En la Fig. 10-14(*c*) dibuje la resultante y descompóngala en sus componentes horizontal y vertical. H representa la suma de las fuerzas horizontales en las dos columnas de soporte. Trace las líneas C_5, C_6 y C_7 des-

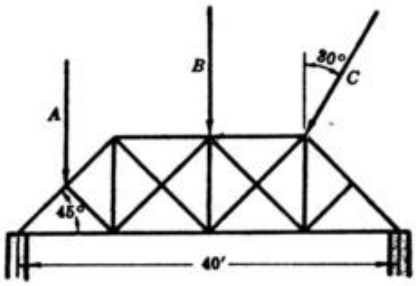


Fig. 10-14(*a*)

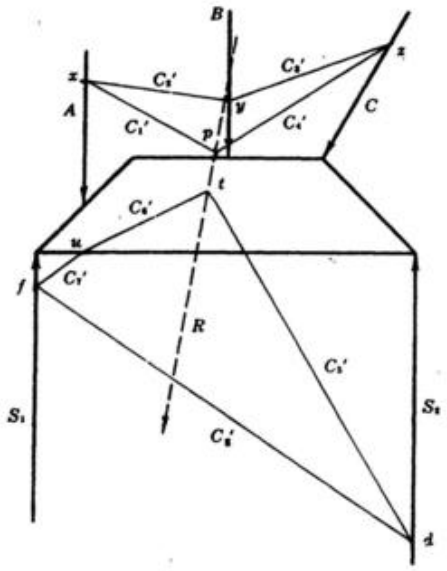
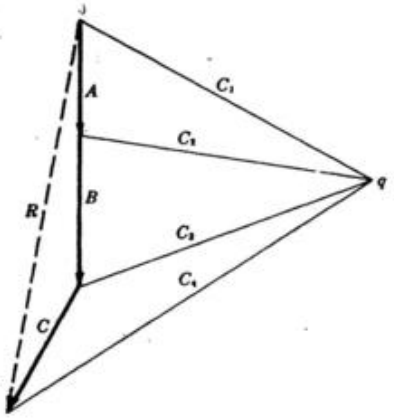


Fig. 10-14(b)



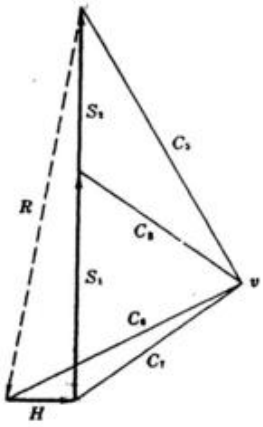


Fig. 10-14(c)

de un punto cualquiera V, situado al lado derecho, como se muestra. El punto que divide la componente vertical en S_1 y S_2, que necesitamos, es aún desconocido. Asuma arbitrariamente que S_2 está situado sobre S_1 en (c). En el diagrama (b), desde un punto cualquiera D situado sobre S_2, trace C_5' paralela a C_5 hasta tocar la resultante —debido a que C_5 toca estos dos vectores en el diagrama (c). Desde el punto de intersección de C_5' con la resultante, punto T, trace C_6' hasta que encuentre la línea de acción de la fuerza horizontal. Desde este punto, U, trace C_7' hasta encontrar la línea de acción de S_1. Trace una línea C_8' desde F hasta D, que une las dos reacciones verticales —S_1 y S_2— en las columnas de soporte. Determine el punto que divide la componente vertical total en S_1 y S_2, trazando la línea C_8 en el diagrama (c) desde V y la paralela a la línea C_8', mostrada en (b). *Resp.* $S_1 = 1180\#$, $S_2 = 870\#$, $H = 375\#$

7. Dado: Un bloque que pesa 850# está colocado sobre un plano cuya inclinación es de 30°. Ver la Fig. 10-15. Utilice la escala vectorial: 1" = 1000#.

Problema: Encuentre la fuerza componente que tiende a arrastrar el bloque hacia abajo, a lo largo del plano, y la componente perpendicular que comprime el bloque contra la superficie.

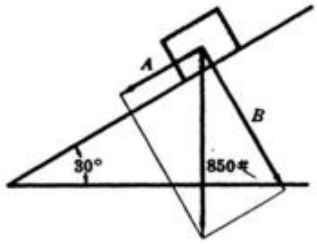


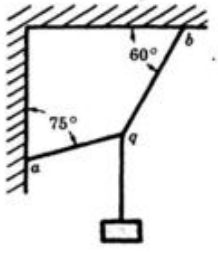
Fig. 10-15

Solución:

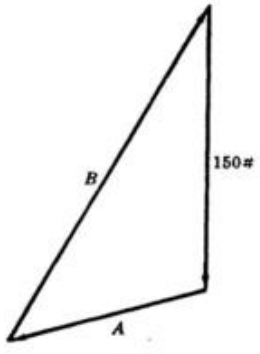
Dibuje a escala un vector fuerza de 850# desde el centro de masa del bloque hacia abajo. Usando el método del paralelogramo, descomponga esta fuerza en dos componentes, una paralela y otra perpendicular a la superficie; ambas fuerzas pasan por el centro de masa del bloque. *Resp.* $A = 425\#$, $B = 740\#$

8. Dado: Un peso de 150# está suspendido de dos cables, como se muestra en la Fig. 10-16(a). Utilice la escala vertical: 1" = 100#.

Problema: Encuentre las tensiones en los cables QA y QB.



(a)



(b)

Fig. 10-16

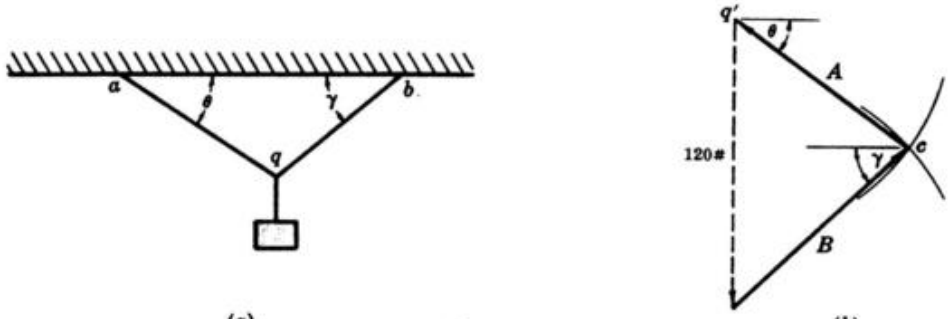
Solución:

Ver la Fig. 10-16(b). Este es un problema de equilibrio. Dibuje a escala un vector fuerza vertical de 150#. Desde la punta de este vector trace una línea paralela a QA y desde la cola, una línea paralela a QB; esto forma un triángulo

cerrado. Dibuje los vectores en dirección continua. Observe que la resultante de A y B equilibra exactamente la fuerza de 150#. Colocando A y B en sus respectivos elementos observará que ambos apuntan alejándose del nudo; por tanto, estas dos fuerzas son tensiones. *Resp.* $A = 105\#$, $B = 205\#$

9. Dado: La Fig. 10-17(a) muestra un peso de 120# suspendido de un punto Q. Dos resortes colocados en A y B indican una tensión de 100# en el cable BQ y una tensión de 90# en el cable AQ. Utilice la escala vectorial: 1 = 80#.

Problema: Encuentre los ángulos θ y γ.



(a) (b)

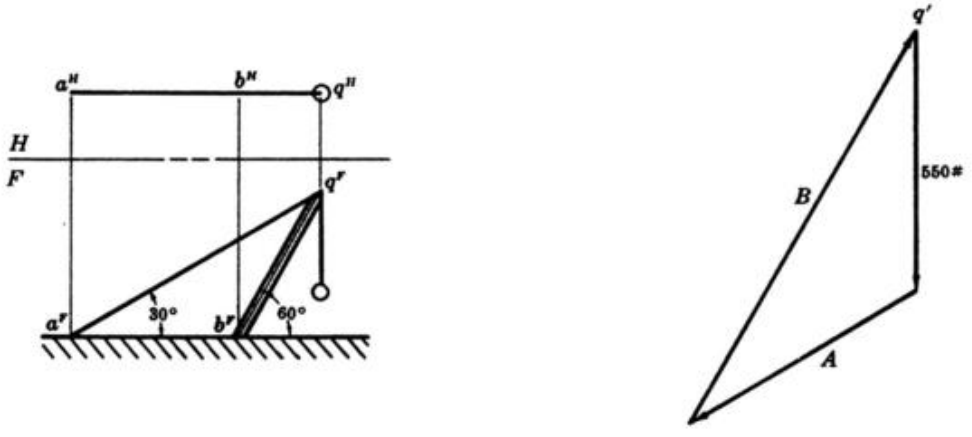
Fig. 10-17

Solución:

Ver la Fig. 10-17(b). Dibuje el vector fuerza vertical de 120# a partir del punto Q'. Con centro en la cola de este vector trace un arco cuyo radio represente 90#; con centro en la punta del vector de 120# trace otro arco cuyo radio represente 100#. Dibuje A y B desde los extremos del vector fuerza hasta el punto de intersección de los arcos, C. A y B son paralelos a los cables QA y QB, respectivamente; por tanto, mida los ángulos θ y γ, como se muestra en el diagrama vectorial. *Resp.* $\theta = 35°$, $\gamma = 43°$

10. Dado: La Fig. 10-18(a). Un cable y un pescante que mantienen en suspensión una bola de 550# de peso. Utilice la escala vectorial: 1" = 400#.

Problema: Determine los esfuerzos que actúan en los dos miembros de la armadura.



(a) (b)

Fig. 10-18

Solución:

Este es un problema de equilibrio. Dibuje a escala el vector fuerza vertical de 550# en un diagrama vectorial. Ver la Fig. 10-18(b). Descomponga esta fuerza en las dos componentes mostradas, trazando a partir de la punta del vector una línea paralela a uno de los miembros (QA) y a partir de la cola del vector una línea paralela al otro miembro (QB). La intersección de estas dos líneas determina la figura cerrada, como se muestra. Dibuje los vectores en dirección continua. A y B equilibran exactamente el vector fuerza de 550#. El vector B, colocado en el pescante, apunta hacia el punto Q, mientras que A, colocado en el cable, apunta en dirección contraria al punto. *Resp.* $B = 950\#$, compresión; $A = 550\#$, tensión

11. Dado: Un peso de 750# está soportado por la armadura que se muestra en la Fig. 10-19. Utilice la escala vectorial: 1" = 500#.

Problema: Encuentre la tensión ejercida en el cable BC.

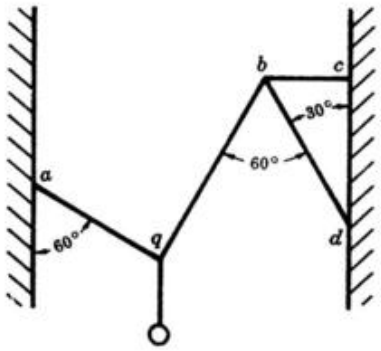
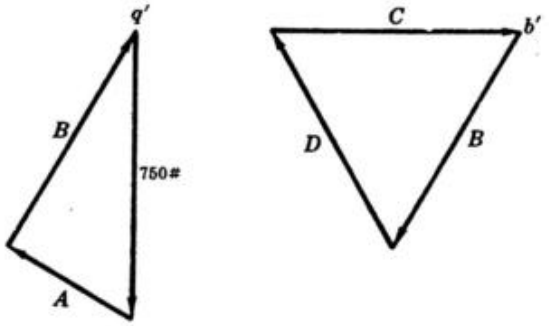


Fig. 10-19



(a) (b)

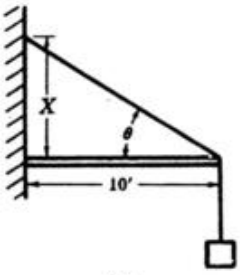
Fig. 10-20

Solución:

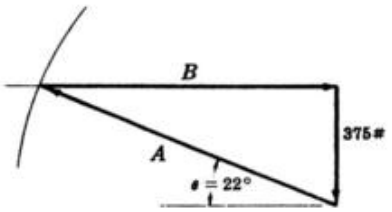
En primer lugar construya un diagrama vectorial de equilibrio alrededor del punto Q. Construya la Fig. 10-20(a) en base al vector fuerza de 750#, dibujado a escala, y descomponga la fuerza en dos componentes, trazando líneas paralelas a QA y QB a partir de los extremos del vector. Así se determina B, la fuerza componente que actúa a lo largo de QB. Coloque B sobre su correspondiente miembro QB, y observará que apunta en sentido contrario al punto Q; por tanto, la fuerza B es una tensión. Ahora, en la Fig. 10-20(b) construya un diagrama vectorial de equilibrio alrededor del punto B. Desde un punto B' dibuje el vector B a escala, alejándose de B', puesto que es una tensión. Descomponga esta fuerza en las dos componentes C y D que actúan en los miembros BC y BD, respectivamente, por los mismos métodos utilizados en (a) anteriormente. Observe que C, colocado sobre el miembro BC, apunta en sentido opuesto al punto B, es decir, que C es una tensión. Los efectos combinados de C y D equilibran exactamente a B. *Resp.* C = 650#, tensión

12. Dado: Una carga de 375# está suspendida en el extremo de un pescante de peso despreciable y 10 pies de longitud, como se muestra en la Fig. 10-21(a). La tensión en el cable no debe ser mayor de 1000#. Utilice la escala vectorial: 1" = 600# y la escala de espacios: 1" = 6'—0".

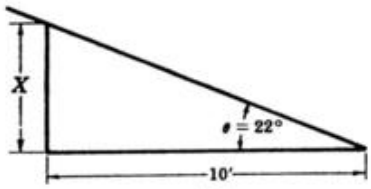
Problema: Encuentre la altura mínima X sobre el pescante a la cual puede asegurarse el cable. ¿Cuál es el esfuerzo ejercido en el pescante cuando el cable está asegurado en esta posición?



(a)



(b)



(c)

Fig. 10-21

Solución:

Debemos encontrar el ángulo θ. En el diagrama vectorial (b) dibuje el vector fuerza vertical de 375#, a escala. Descomponga esta fuerza en las dos componentes que actúan a lo largo de los elementos dados, describiendo un arco con centro en la punta de este vector, cuyo radio represente 1000# y encontrando el punto de intersección de este arco con una línea horizontal trazada a partir de la cola del vector. A y B, actuando simultáneamente, equilibran la fuerza. Mida el ángulo θ, el cual vale 22°. Conocido θ construya el triángulo en (c) y mida X. El esfuerzo en el pescante está representado por B. Colocando B en el pescante observará que apunta hacia el punto de equilibrio. *Resp.* X = 4'—0", B = 925#, compresión

13. Dado: Una cuerda de 130 pies de longitud está tendida sobre una zanja, soportando una carga de 650# que ha rodado hasta llegar a su posición de equilibrio. Ver la Fig. 10-22(*a*). Use la escala vectorial: 1″ = 1000# y la escala de espacios: 1″ = 50′—0″.

Problema: Encuentre la tensión en la cuerda y la distancia X.

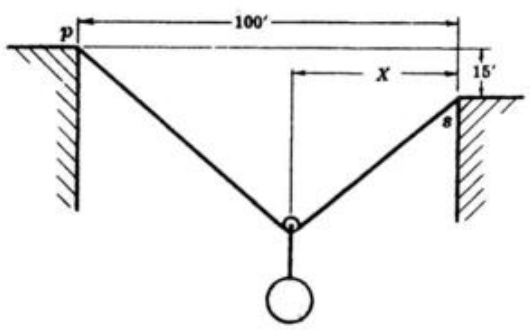


Fig. 10-22(*a*)

Solución:

Sabemos, por un principio fundamental, que los ángulos que la cuerda hace con una línea horizontal son iguales a uno y otro lado de la polea suspendida, cuando ésta está en su posición de equilibrio. En (*b*) encuentre α por medio de las siguientes relaciones:

$$X \sec\alpha + (100 - X)\sec\alpha = 130$$
$$X \sec\alpha + 100\sec\alpha - X\sec\alpha = 130$$
$$\sec\alpha = 1{,}3$$

En (*c*) construya el ángulo α en P y en S y encuentre el punto de intersección de las dos líneas trazadas, Q. De esta manera se determina la distancia X. A partir de Q dibuje la fuerza vertical a escala, y descompóngala en las dos componentes que actúan a lo largo de la cuerda, trazando líneas paralelas a las dos porciones de la cuerda, a partir de los dos extremos del vector fuerza. Colocando estos vectores componentes en los respectivos elementos, QP y QS, observará que ambos apuntan en dirección contraria al punto. Por tanto, las dos fuerzas componentes producen tensiones. Observe también que la tensión en la cuerda es la misma a ambos lados de la polea. Esto se cumplirá siempre para cualquier cuerda, sobre la cual se deslice una "polea sin rozamiento".

Resp. Tensión = 510#, X = 42′—6″

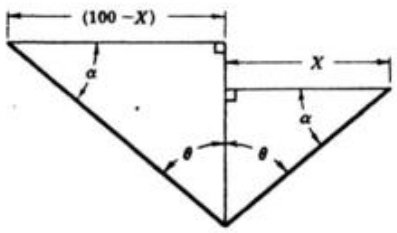


Fig. 10-22(*b*)

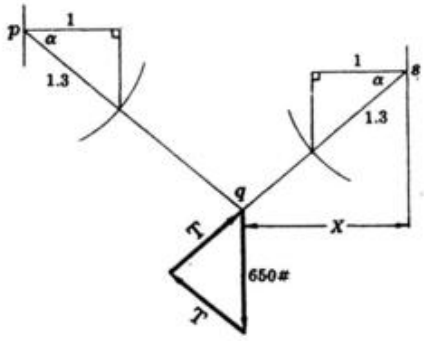


Fig. 10-22(*c*)

14. Dado: Se desea ejercer una fuerza de 360# sobre una superficie inclinada por medio de un rodillo, tal como se muestra en la Fig. 10-23(*a*). El rodillo está soportado por dos cables que forman entre sí un ángulo de 25°. Utilice la escala vectorial: 1″ = 400#.

Problema: ¿Qué peso debe tener el rodillo y cuál es la tensión en los cables cuando se está usando éste?

Solución:

Ver la Fig. 10-23(*b*). Dibuje un diagrama vectorial de equilibrio alrededor de un punto situado en el centro del rodillo. Establezca la única fuerza conocida que actúa sobre el punto —una fuerza normal de 360 # que actúa *hacia* el punto y es ejercida por la superficie inclinada para mantener el equilibrio. En (*b*) descomponga esta fuerza en dos componentes, trazando desde los extremos del vector conocido líneas paralelas a las otras fuerzas que actúan en el punto — el peso del rodillo y la tensión en los cables. B representa el peso del rodillo. Para encontrar la tensión real en los cables tome una vista 1 del vector A y descomponga A en las dos componentes que actúan a lo largo de los cables. *Resp.* Rodillo = 335#, tensión en el cable = 216# en cada uno

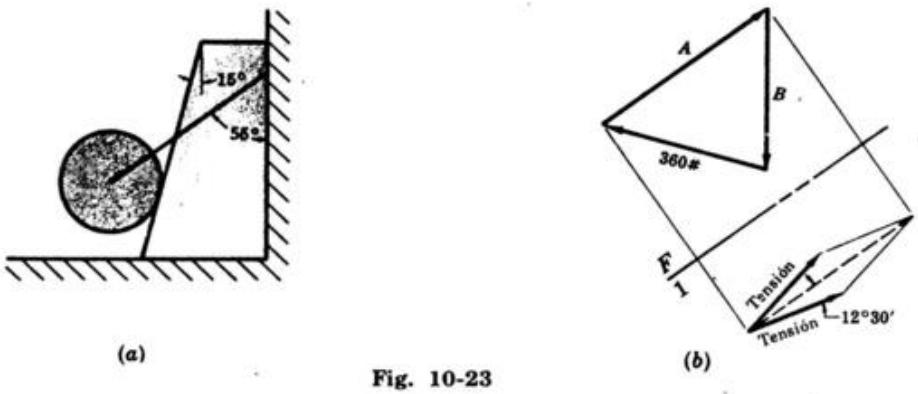


Fig. 10-23

15. **Dado:** La Fig. 10-24. Cada uno de los cables utilizados en el problema 14 puede resistir una tensión máxima de 450#. Utilice la escala vectorial: 1" = 600#.

Problema: Encuentre el rodillo de peso máximo y la máxima fuerza que se puede ejercer sobre la superficie.

Solución:

Trace una línea paralela a los cables en la vista frontal y construya una vista inclinada 1 de esta línea. Trace dos líneas que hagan ángulos de 12,5° con la línea, a uno y otro lado de ésta y tome 450# sobre cada una de ellas —puesto que aparecen en su verdadera longitud en esta vista. Encuentre la resultante *A* por el método del paralelogramo y proyecte a la vista frontal para establecer el vector *A* en esta vista. Descomponga esta fuerza en dos componentes equilibrantes que son paralelas a las otras fuerzas que actúan en el punto central del rodillo — el peso del rodillo y la fuerza normal ejercida por la superficie. *B* representa el peso del máximo rodillo y *C* la máxima fuerza ejercida sobre la superficie.

Resp. $B = 695\#$, $C = 745\#$

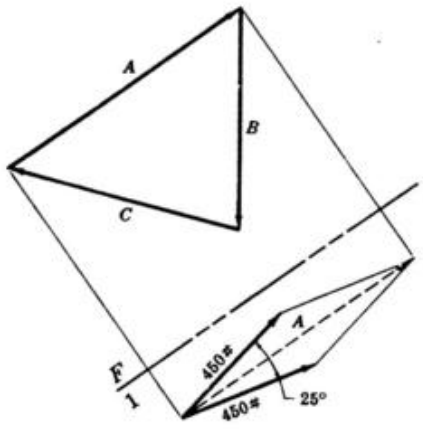


Fig. 10-24

16. **Dado:** Un avión viaja originalmente orientado hacia el norte, pero luego es desviado de su curso por un viento que tiene una velocidad de 75 m.p.h. y una dirección S 45° E. El velocímetro del avión indica 200 m.p.h. Use la escala vectorial: 1" = 100 m.p.h.

Problema: Encuentre la velocidad y la dirección reales del avión con respecto a la tierra.

Solución:

Dibuje el vector de 200 m.p.h. dirigido hacia el norte y agréguele el vector que representa la velocidad del viento, uniendo ambos vectores por sus colas o bien por sus puntas. Ver la Fig. 10-25. El vector que representa la velocidad real del avión respecto a la tierra es simplemente el resultante de los dos vectores anteriores, el cual fue encontrado tanto por el método del paralelogramo [Fig. 10-25(*a*)] como por el del polígono [Fig. 10-25(*b*)].

Resp. Velocidad real = 155 m.p.h.
Dirección real = N 20° E

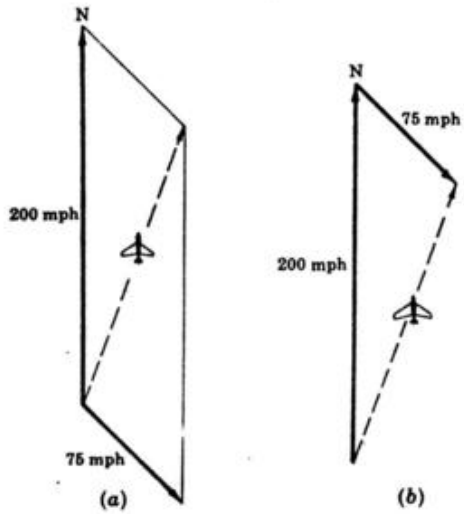


Fig. 10-25

17. Dado: Un piloto establece con la brújula de su avión una dirección N 20° O. El velocímetro indica 275 m.p.h. A esta altura sopla un viento a una velocidad de 90 m.p.h. en una dirección S 50° O. En un determinado momento el piloto se encuentra situado directamente sobre un punto que está 90 millas al sur y 110 millas al este de un pueblo X. Utilice la escala vectorial: 1" = 200 m.p.h. y la escala de espacios: 1" = 200 millas.

Problema: ¿A qué distancia mínima del pueblo X pasará el avión?

Solución:

Dibuje a escala el vector de 275 m.p.h. en dirección N 20° O. Sume a este vector el que representa la velocidad del viento por el método del paralelogramo [Fig. 10-26(*a*)] o por el método del polígono [Fig. 10-26(*b*)]; el resultante de estos dos vectores representa la velocidad real del avión respecto a la tierra. La línea perpendicular trazada desde X hasta la resultante representa la distancia.

Resp. Distancia = 28 millas

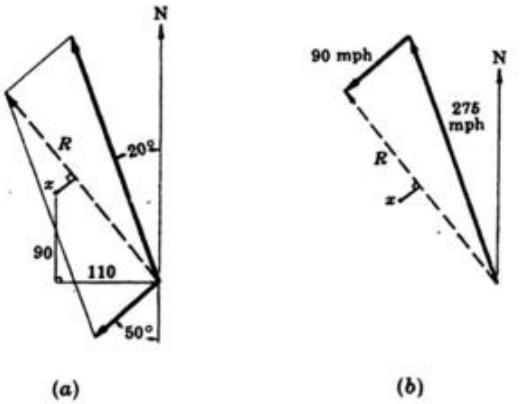


Fig. 10-26

18. Dado: Se desea cruzar en un bote un río de 6 millas de ancho, partiendo desde un punto Q y avanzando hacia el norte para llegar a un punto P. El bote alcanza a desarrollar una velocidad de 6 millas por hora en aguas tranquilas y el río lleva una velocidad de 4 m.p.h. orientada hacia el este. Utilice la escala vectorial: 1" = 4 m.p.h. y la escala de espacios: 1" = 4 millas.

Problema: Encuentre la orientación que debe marcar la brújula del bote. ¿Cuánto tiempo le tomará al bote cruzar el río?

Solución:

Remítase a la Fig. 10-27. Queremos hallar un vector velocidad resultante que apunte directamente hacia el norte y cuya línea de acción pase por el punto P. Dibuje a escala el vector A, que representa la velocidad del agua, a partir del punto Q. Con centro en la punta de este vector describa un arco cuyo radio represente la velocidad de 6 m.p.h. que alcanza el bote en agua tranquila. Encuentre el punto C, donde este arco corta la línea recta trazada desde Q hasta P. El vector velocidad resultante estará localizado desde Q hasta C cuando la brújula del bote marque una orientación N θ O. Divida el ancho del río (seis millas) por la magnitud de la velocidad resultante, con el fin de encontrar el tiempo transcurrido en ir desde el punto Q hasta el punto P. *Resp.* Angulo de orientación θ = N 42° O. Tiempo = 1 hora 20 minutos

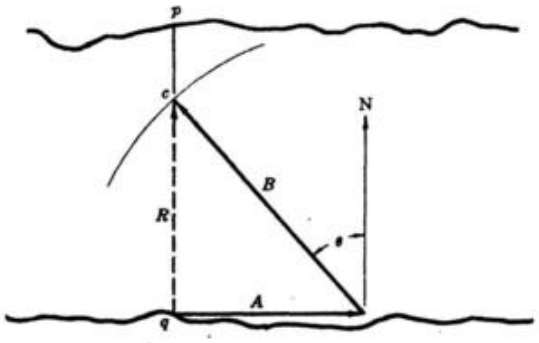


Fig. 10-27

19. Dado: Un barco X sigue un curso N 15° E y viaja a una velocidad de 15 m.p.h. El barco Y, mostrado en la Fig. 10-28, alcanza a desarrollar una velocidad de 26 m.p.h. en aguas tranquilas y desea pasar en frente del barco X, sin estar nunca a una distancia menor de 5 millas de éste. Una corriente de agua con velocidad de 8 m.p.h. y dirección S 60° E tiende a sacar al barco Y de la orientación indicada por su brújula. Use la escala vectorial: 1" = 20 m.p.h y la escala de espacios: 1" = 20 millas.

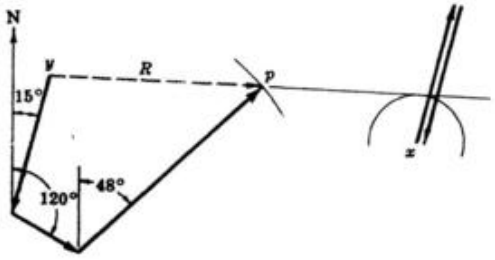


Fig. 10-28

Problema: Encuentre la orientación de la brújula del barco *Y*, si éste debe pasar en frente del barco *X* en el menor tiempo posible.

Solución:

En problemas de movimiento relativo es a menudo provechoso introducir un nuevo vector que actúe sobre los dos objetos, con el fin de colocar uno de ellos en reposo. Coloque en reposo el barco *X*, sumando un vector que represente una velocidad de 15 m.p.h. y tenga sentido opuesto al movimiento de *X*, a ambos barcos. Desde la punta de este vector (el que se trazó a partir de *Y*) dibuje el vector que representa la velocidad de la corriente de agua. Con centro en la punta de este último vector describa un arco, cuyo radio represente la velocidad de 26 m.p.h. Deseamos que el vector resultante esté situado a lo largo de la línea que parte de *Y* y es tangente a un arco con centro en el punto *X*, cuyo radio representa una distancia de 5 millas. Encuentre *P*, que es el punto de intersección del primer arco trazado con la línea tangente. De esta manera queda determinada la velocidad resultante y la orientación del barco *Y*. *Resp.* Orientación = N 48° E

20. Dado: Un avión está volando sobre *A* a una velocidad de 360 m.p.h., siguiendo un curso N 35° E (ambos con respecto a la tierra). Ver la Fig. 10-29. Un minuto después de haber pasado este avión sobre *A*, un segundo avión parte de *B* en un intento de interceptar al primer avión. Este segundo avión alcanza una velocidad de 400 m.p.h. en aire quieto, pero hay un viento con velocidad de 80 m.p.h. que sopla en dirección N 15° O. Utilice la escala vectorial: 1" = 400 m.p.h. y la escala de espacios: 1" = 6 millas.

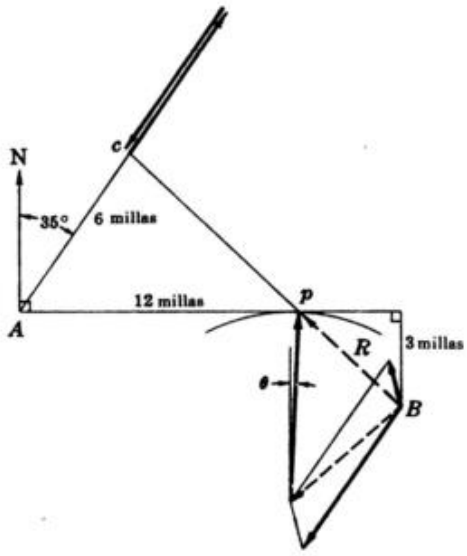


Fig. 10-29

Problema: ¿Qué orientación debe indicar la brújula del segundo avión? Encuentre el tiempo que el segundo avión está en vuelo, hasta llegar al punto de intersección.

Solución:

Después de haber transcurrido un minuto, el primer avión estará en *C*. Coloque el primer avión en reposo, introduciendo un nuevo vector que represente una velocidad de 360 m.p.h. (con dirección opuesta a la del movimiento del primer avión) y actúe sobre ambos aviones. Para el avión situado en *B*, agregue al primer vector dibujado, el vector que representa la velocidad del viento y con centro en la punta del vector resultante de los dos anteriores, describa un arco cuyo radio represente una velocidad de 400 m.p.h. Como queremos que el resultante de todos los vectores velocidad que actúan en *B* esté dirigido hacia *C*, encuentre el punto de intersección *P* del arco con la línea que va de *B* a *C*. De este modo se determina el vector velocidad resultante *R* y la orientación indicada por la brújula del avión situado en *B*. Encuentre el tiempo transcurrido, dividiendo la distancia de *B* a *C* por la velocidad resultante.

Resp. Orientación θ = N 3° E, tiempo = 2,4 minutos

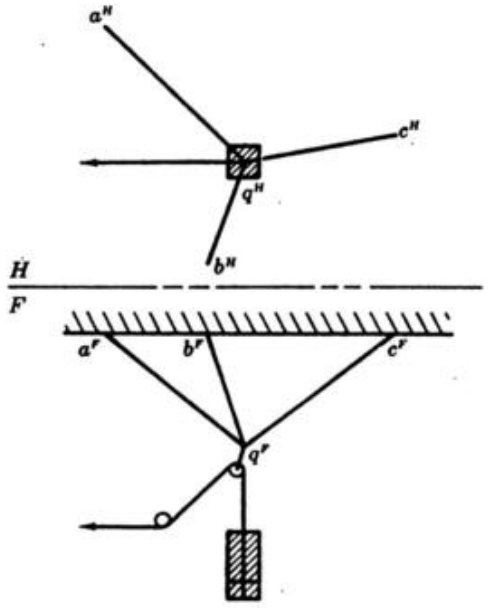


Fig. 10-30

21. Dado: El sistema de cables y poleas mostrado en la Fig. 10-30 está levantando una caja de 300# a velocidad constante. Utilice la escala vectorial: 1" = 600#.

Problema: Encuentre el esfuerzo en cada uno de los cables de soporte, usando el método de la vista de filo del plano.

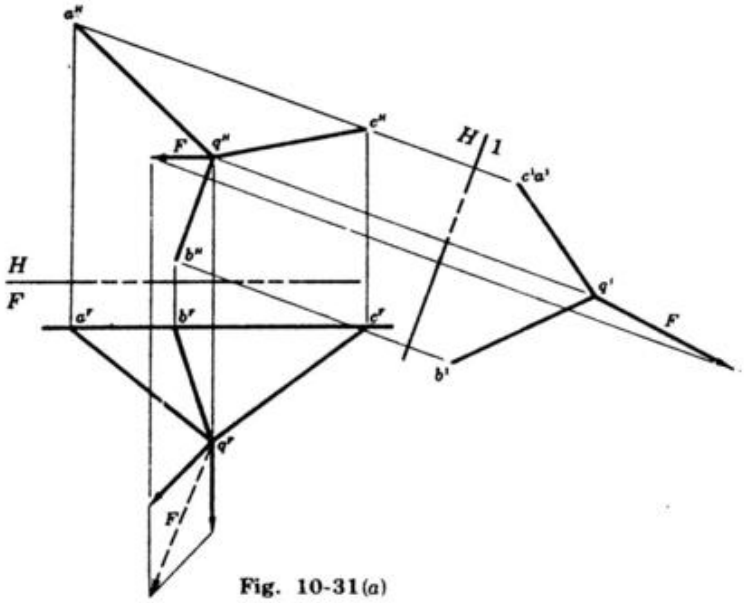


Fig. 10-31(*a*)

Solución:

La tensión es la misma en todas las porciones del cable que desliza sobre la polea. Utilice este hecho para encontrar la *dirección* de la fuerza resultante ejercida en el punto de intersección de los tres cables en la vista frontal de la Fig. 10-31(*a*). Dibuje la vista de elevación auxiliar 1 para obtener el plano formado por los cables *QA* y *QC* como un filo. Trace una línea paralela a la fuerza *F* en las dos vistas del diagrama vectorial, en la Fig. 10-31(*b*). Coloque la línea de pliegue *H*-*F* paralela a la línea de fuerza representada en la vista de planta —esto nos permite dibujar a escala las tensiones en el cable con sus longitudes verdaderas, en la vista frontal. Encuentre la resultante y proyéctela a las dos vistas originales, para establecer *F* en ellas.

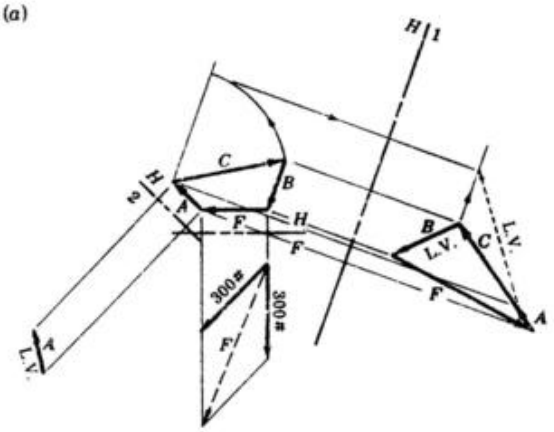


Fig. 10-31(*b*)

En la vista 1 descomponga *F* en dos componentes paralelas a las líneas que se muestran en la vista 1 de (*a*). Dibuje los vectores en dirección continua. El punto de separación entre *A* y *C* es todavía desconocido. Proyecte desde la vista 1 para encontrar *B* en la vista de planta. En esta vista, a partir de la punta de *F* y la cola de *B*, trace líneas paralelas a *QA* y *QC*, respectivamente, mostradas en la vista de planta de (*a*); proyecte el punto de intersección de estas dos líneas sobre la vista 1, para encontrar el punto de separación entre *A* y *C*. Obtenga las longitudes verdaderas de *A*, *B* y *C* con el fin de encontrar las magnitudes reales de los esfuerzos ejercidos por los cables *QA*, *QB* y *QC*. Debido a que *B* está en la vista de planta paralelo a la línea de pliegue *H*-1 (por coincidencia), aparecerá en su verdadera longitud en la vista 1. Colocando *A*, *B* y *C* en sus respectivos elementos, observe que todos apuntan en dirección contraria al punto de intersección de los cables. Luego estas tres fuerzas son tensiones. *Resp.* $A = 150\#$, $B = 240\#$, $C = 440\#$

22. Dado: El diagrama de fuerzas de la Fig. 10-32(*a*) muestra dos cables y un poste que contrarrestan la acción de una fuerza *F* de 1000#. Use la escala vectorial: 1″ = 1000#.

Problema: Use la notación de Bow y encuentre los esfuerzos que actúan en el poste y en cada uno de los cables.

Solución:

En la Fig. 10-32(*a*) la línea torcida que aparece en la vista de planta (debido a la notación de Bow) representa el poste, el cual aparece en realidad como un punto en esta vista. Por tanto, conviene descomponer la fuerza por el método de la vista de punta de la línea. En primer lugar coloque letras mayúsculas en todos los espacios localizados alrededor del punto de equilibrio *D*, en la vista de planta y escoja una dirección de lectura e indíquela por medio de una flecha.

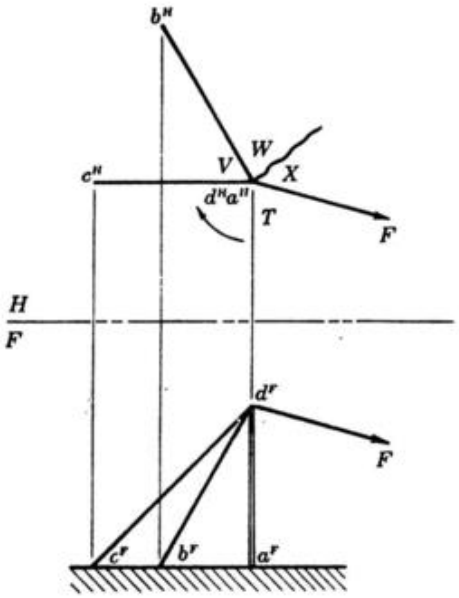


Fig. 10-32(*a*)

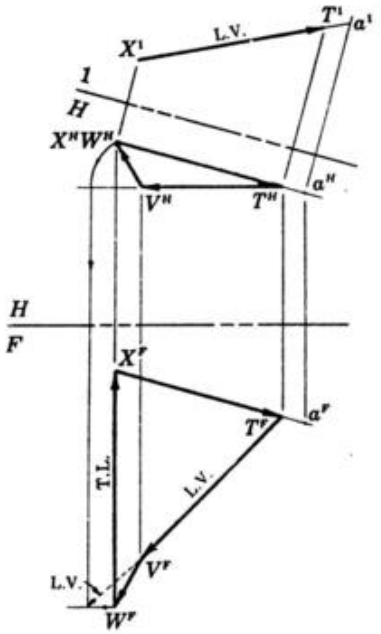


Fig. 10-32(*b*)

En el diagrama vectorial de la Fig. 10-32(*b*) establezca la fuerza conocida F así: En las dos vistas de (*b*) trace líneas paralelas a F, tal como aparece en las vistas correspondientes de (*a*). Escoja un punto cualquiera A sobre esta línea y obtenga la longitud verdadera de XA en la vista 1. Tome 1000# a lo largo de esta línea y proyecte esta distancia a la vista de planta y a la vista frontal. Debido a que esta fuerza es designada como XT en la notación de Bow, llame X el origen del vector y T el extremo. Siguiendo el orden, de acuerdo con la dirección de la flecha, el siguiente vector es TV. Trace en ambas vistas (de planta y frontal) líneas paralelas a DC, tal como aparece en las vistas correspondientes de (*a*). El vector VW debe completar el triángulo en la vista de planta, debido a que WX aparece como un punto en esta vista. Por tanto, trace una línea paralela a DB —mostrada en la vista de planta de (*a*)— a partir del punto X, en la vista de planta de (*b*). La intersección de las dos últimas líneas trazadas determina el punto V. Proyecte este punto a la vista frontal para obtener TV allí. En la vista frontal de (*b*) trace el vector VW paralelo a DB —como aparece en la vista frontal de (*a*)— y proyecte desde la vista de planta para encontrar el punto W. Complete el polígono en la vista frontal, uniendo el punto W con el punto X. Este vector WX está en verdadera longitud puesto que aparece como un punto en la vista de planta. TV también está en su verdadera longitud en la vista frontal y por revolución se determina la longitud verdadera de VW. Estas líneas en verdadera longitud representan las magnitudes reales, dibujadas a escala, de los esfuerzos ejercidos en los diferentes miembros. Todos los vectores deben ser dibujados en dirección continua alrededor de las figuras. Coloque los vectores sobre los elementos correspondientes [de acuerdo con el principio fundamental (5)] para determinar si los esfuerzos son tensiones o compresiones.

Resp. TV = 1040#, tensión; VW = 370#, tensión; WX = 1210#, compresión

Problemas propuestos

23. Dos fuerzas coplanares (A = 5#, B = 12#) actúan sobre el bloque que se muestra en la Fig. 10-33. Encuentre la equilibrante y la resultante. Utilice la escala vectorial: 1" = 5#. *Resp.* $E = R$ = 13#

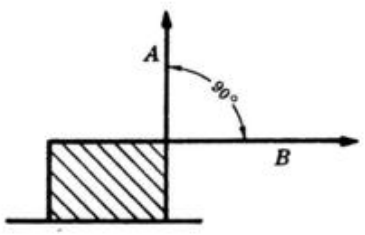


Fig. 10-33

24. Dos cohetes de un proyectil están colocados de modo que forman entre sí un ángulo de 40°. Cada cohete es capaz de producir un empuje de 12.000#. Encuentre el empuje total que se produce hacia adelante. Utilice la escala vectorial: 1" = 5000#. *Resp.* Empuje = 22.500#

25. Tres fuerzas concurrentes ($A = 75\#$, $B = 190\#$, $C = 240\#$) actúan sobre el punto Q, como se muestra en la Fig. 10-34. Encuentre su resultante. Utilice la escala vectorial: 1" = 100#. *Resp.* Resultante = 373#

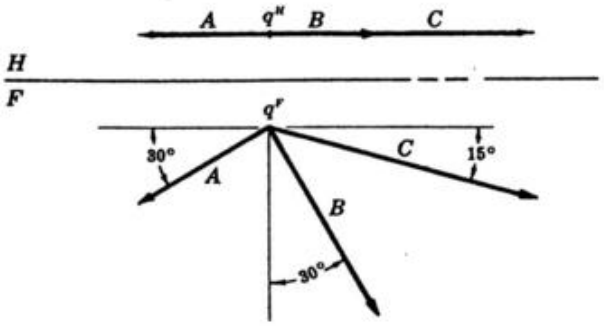


Fig. 10-34

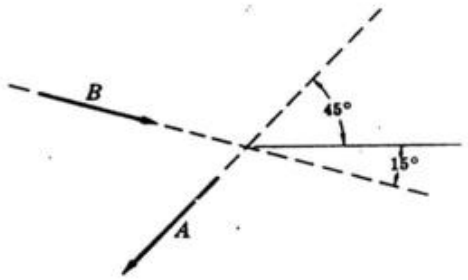


Fig. 10-35

26. Dadas dos fuerzas: $A = 50\#$ y $B = 35\#$ que se muestran en la Fig. 10-35, encuentre la resultante y el ángulo que ésta hace con una línea recta horizontal. Use la escala vectorial: 1" = 20#.
Resp. Resultante = 44,5#, ángulo = 92°

27. Cinco fuerzas diferentes actúan sobre una roca, como se muestra en la Fig. 10-36. Encuentre la resultante. Utilice la escala vectorial: 1" = 30#. *Resp.* Resultante = 115#

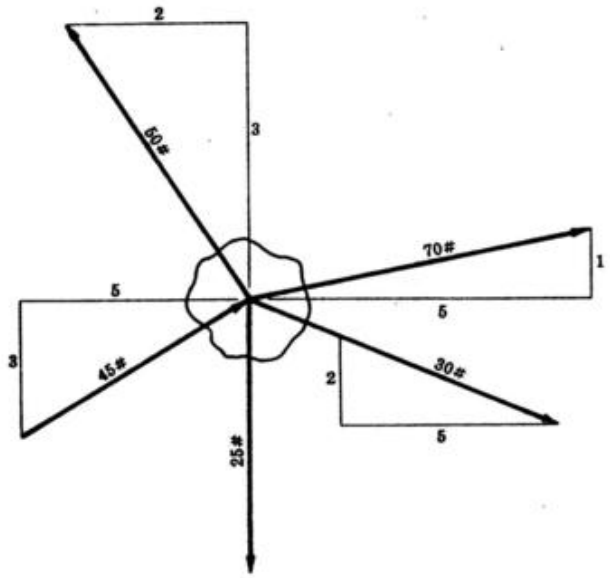


Fig. 10-36

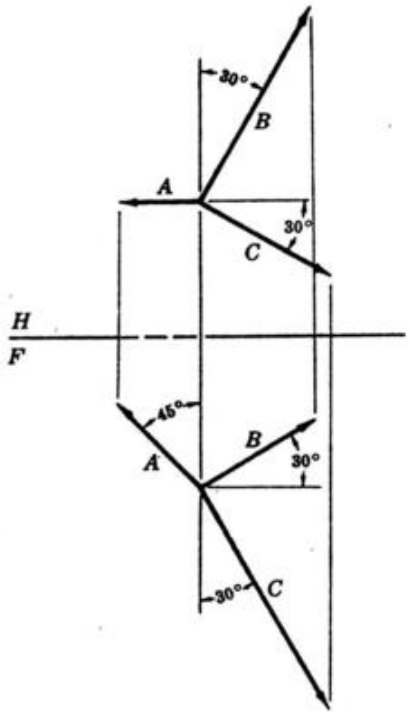


Fig. 10-37

28. Dadas tres fuerzas: $A = 45\#$, $B = 95\#$ y $C = 125\#$, que se muestran en la Fig. 10-37, encuentre su resultante. Use la escala vectorial: 1" = 50#. *Resp.* Resultante = 95#

29. La Fig. 10-38 muestra tres fuerzas: $A = 300\#$, $B = 520\#$ y $C = 240\#$. Encuentre la resultante. Utilice la escala vectorial: $1'' = 200\#$. *Resp.* Resultante = $584\#$

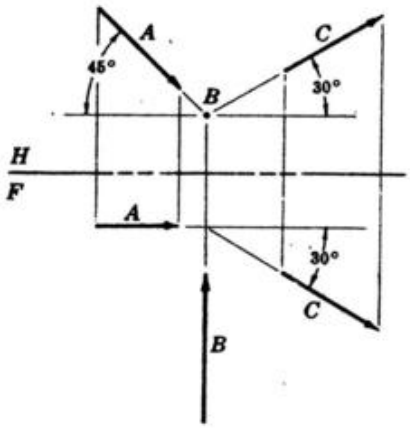


Fig. 10-38

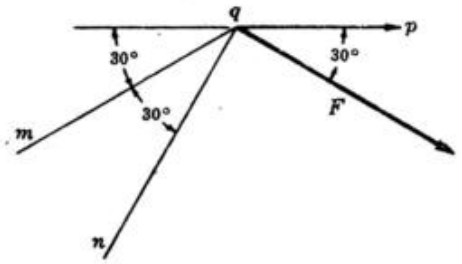


Fig. 10-39

30. Se desea descomponer la fuerza F ($F = 750\#$) en tres componentes coplanares que actúen a lo largo de las líneas QM, QN y QP (ver la Fig. 10-39). Se sabe que la componente que actúa a lo largo de QP es igual a $300\#$ y tiene la dirección mostrada. Encuentre las componentes de la fuerza que actúan a lo largo de QM y QN. Use la escala vectorial: $1'' = 200\#$. *Resp.* $QM = 985\#$, $QN = 1000\#$

31. La fuerza A ($56\#$ y $30°$ de pendiente) actúa sobre el bloque que se muestra en la Fig. 10-40. Encuentre la componente de la fuerza que empuja el bloque hacia la izquierda, en la dirección indicada. Utilice la escala vectorial: $1'' = 20\#$. *Resp.* Fuerza = $42\#$

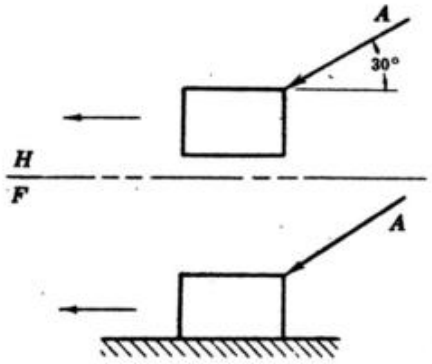


Fig. 10-40

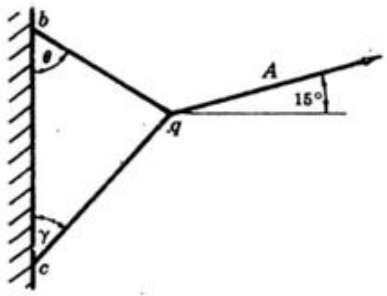


Fig. 10-41

32. El viento golpea un establo formando un ángulo de 70° con el costado de éste. El viento ejerce sobre el establo una fuerza total de $3300\#$ en esa dirección. Encuentre las componentes de la fuerza paralela y perpendicular al costado del establo. Utilice la escala vectorial: $1'' = 1000\#$.
Resp. Componente paralela = $1130\#$, componente normal = $3100\#$

33. Una fuerza A de $1500\#$ actúa sobre los cables QB y QC, como se muestra en la Fig. 10-41. Dos resortes colocados adecuadamente, indican una tensión de $1050\#$ en el cable QB y una tensión de $625\#$ en el cable QC. Encuentre los ángulos θ y γ. Utilice la escala vectorial: $1'' = 300\#$. *Resp.* $\theta = 85°$, $\gamma = 40°$

34. Un peso de 180# es soportado por la tirantería de cuerdas que se muestra en la Fig. 10-42. BCE es un triángulo equilátero. Encuentre las tensiones en los cables AB y CD. Utilice la escala vectorial: 1" = 50#.
Resp. AB = 132#, CD = 161#

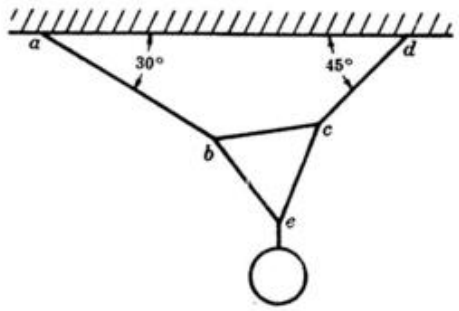


Fig. 10-42

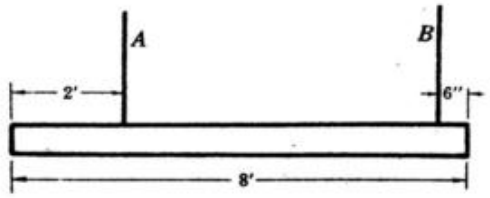


Fig. 10-43

35. Una viga de acero que pesa 1000# se muestra en la Fig. 10-43. Su centro de masa está en el centro de la viga. Encuentre las tensiones en los cables de soporte A y B. Use la escala vectorial: 1" = 200# y la escala de espacios: 1" = 2'. *Resp.* A = 635#, B = 365#

36. Las fuerzas A, B y C producen un par sobre la barra que se muestra en la Fig. 10-44. A = 120#, B = 80#, C = 150#. Encuentre: (*a*) La única fuerza capaz de mantener la barra en equilibrio y (*b*) su línea de acción. Use la escala vectorial: 1" = 50# y la escala de espacios: 1" = 2'.
Resp. (*a*) Fuerza = 168# (*b*) La línea de acción pasa por un punto situado 4'—9" exactamente a la izquierda del centro de masa

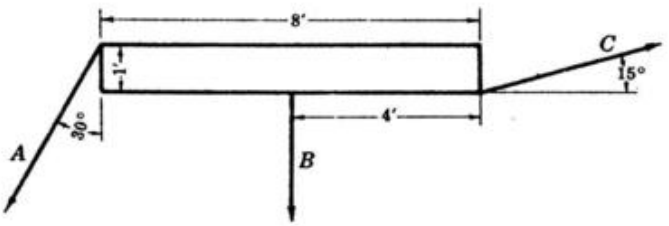


Fig. 10-44

37. La brújula de un avión indica una orientación N 120° O y la velocidad del avión en el aire quieto es de 450 m.p.h. La velocidad del viento es 100 m.p.h. y su dirección N 120° E. Encuentre la velocidad del avión con respecto a la tierra y su curso real. Use la escala vectorial: 1" = 100 m.p.h.
Resp. Velocidad con respecto a la tierra = 410 m.p.h., curso = N 132° O

38. Un bote de remos, capaz de alcanzar una velocidad de 5 m.p.h. en aguas tranquilas, debe atravesar un río y llegar a un punto situado seis millas al norte y 5 millas aguas abajo del punto de partida. El río corre en dirección este, paralelo a la ribera, con una velocidad de 6 m.p.h.

¿Qué orientación debe marcar la brújula del bote y cuánto tiempo transcurrirá hasta el momento de desembarcar? *Resp.* Orientación = N 27° O, tiempo = 1,36 horas

39. Un bote, capaz de alcanzar una velocidad de 12 m.p.h. en aguas tranquilas, está viajando a máxima velocidad en dirección este, mientras que la corriente de agua, con velocidad de 5 m.p.h., va hacia el oeste. Desde el bote se observa una isla situada 1250 pies al frente de él, y se decide pasarla por el norte, esquivándola a 500 pies. Encuentre la orientación de la brújula, sobre la cual el piloto debe enrumbar el bote. Use la escala vectorial: 1" = 5 m.p.h. y la escala de espacios: 1" = 250'. *Resp.* Orientación = N 76° E

40. El bote A, capaz de alcanzar una velocidad de 8 m.p.h. en aguas tranquilas, avanza (realmente) hacia el norte. Un viento que sopla en la dirección N 15° E, le imprime al bote una velocidad de 2 m.p.h. en esa dirección. Una corriente de agua con una velocidad de 4 m.p.h., avanza hacia el oeste. El bote B está inicialmente 9 millas al este y 8 millas al norte del bote A y está viajando a una velocidad de 12 m.p.h. hacia el este (éste es su curso real y la velocidad es tomada con respecto a tierra). Cinco millas al norte de su posición inicial el bote A ve al bote B y decide interceptarlo.

¿Cuál es la mínima distancia que el bote A debe recorrer para llegar hasta el bote B? ¿Cuál será la orientación indicada por la brújula del bote A, una vez que éste ha visto al bote B y decide interceptarlo? ¿Cuánto tiempo transcurrirá desde que el bote A está en su posición inicial hasta que intercepte al bote B? Utilice la escala vectorial: 1" = 4 m.p.h. y la escala de espacios: 1" = 2 millas.
Resp. Orientación = N 38° E, distancia = 0,9 millas, tiempo = 49 minutos

41. Un tablón de 180# de peso (cuyo centro de masa coincide con su centro geométrico) soporta una bola de 425#, como se muestra en la Fig. 10-45. Unicamente el extremo derecho del tablón está asegurado firmemente a la superficie. Encuentre las componentes normal y tangencial de la fuerza ejercida sobre cada superficie del soporte. Use la escala vectorial: 1" = 200# y la escala de espacios: 1" = 2'. (*Sugerencia:* Encuentre la fuerza resultante que actúa sobre el extremo derecho del tablón.) *Resp.* Superficie inclinada: Componente normal = 278#
Superficie horizontal: Componente normal = 348#
Componente tangencial = 103#

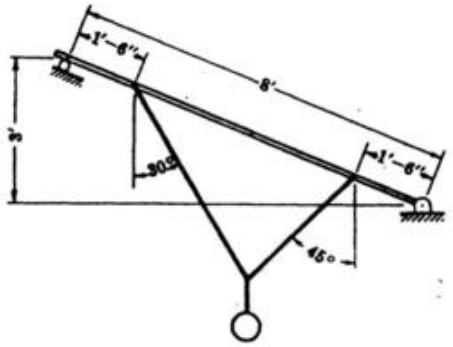


Fig. 10-45

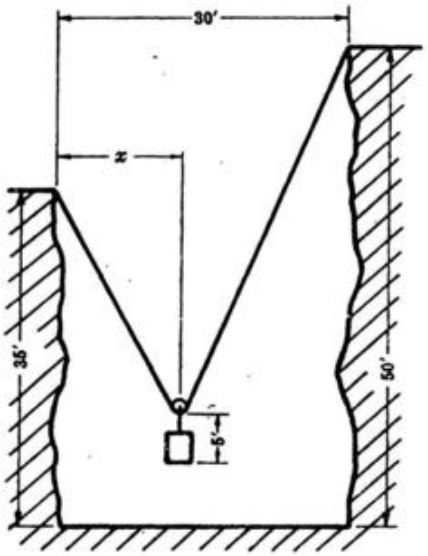


Fig. 10-46

42. Una cuerda de 70' está tendida sobre una zanja y soporta por medio de una polea, una caja de 150#. Remítase a la Fig. 10-46. Halle la distancia X, para la cual la caja está más cerca de la tierra. ¿Cuál es la tensión en la cuerda en este caso? ¿A qué altura por encima de la tierra, estará el fondo de la caja en este caso? Use la escala vectorial: 1" = 50# y la escala de espacios: 1" = 10'. *Resp.* Distancia X = 11'—6", tensión = 83#, altura = 5'—8"

43. Un sistema de tres fuerzas (A = 40#, B = 24# y C = 35#) se muestra en la Fig. 10-47. Cuando el sistema está en su posición de equilibrio, se observa que las poleas están a la misma altura y separadas por una distancia de cinco pies. El pescante puede oscilar libremente alrededor de su extremo sujeto a la pared. Cuando el sistema esté en equilibrio, encuentre la distancia X, la tensión en el pescante (el peso del pescante es despreciable) y el ángulo θ. Utilice la escala vectorial: 1" = 20# y la escala de espacios: 1" = 1'—0".
Resp. Distancia X = 3'—6", tensión = 66,5#, θ = 18°30'

44. Tres cuerdas sostienen un poste vertical, como se muestra en la Fig. 10-48. El poste sufre una compresión de 100#. Encuentre los esfuerzos en las cuerdas. Use la escala vectorial: 1" = 50#.
Resp. QA = 33#, tensión, QB = 42#, tensión;
QC = 59,5#, tensión;

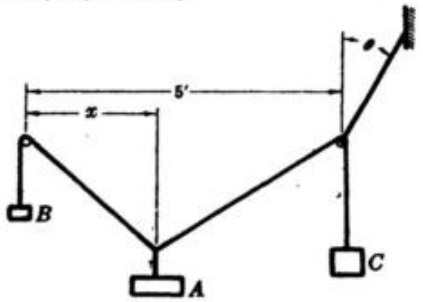


Fig. 10-47

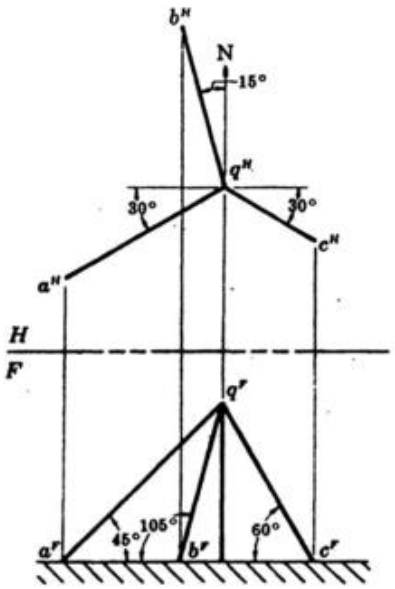


Fig. 10-48

45. La Fig. 10-49 muestra un armazón que soporta una bola de 220# de peso. Encuentre el esfuerzo ejercido en cada miembro del armazón, usando la notación de Bow. Utilice la escala vectorial: 1" = 100#.

Resp. QA = 115#, tensión
QB = 200#, compresión
QC = 85#, tensión

46. La Fig. 10-50 muestra la mitad del sistema de soporte de un rodillo de acero. Se sabe que QA es el cable más débil y es capaz de resistir una tensión de 450#. Encuentre el rodillo más pesado que se puede suspender y la fuerza ejercida por éste sobre la superficie inclinada. Use la escala vectorial: 1" = 200#.

Resp. Rodillo = 1740#
Fuerza normal = 900#

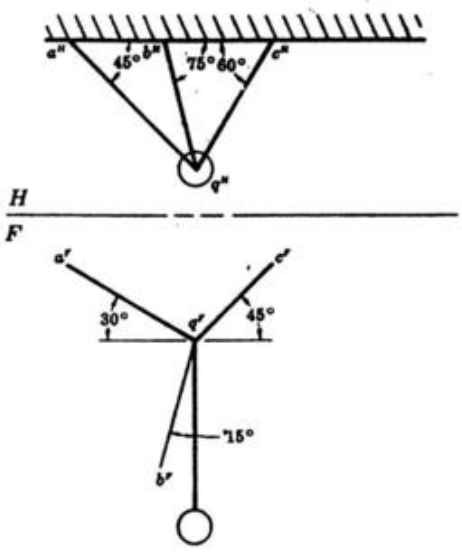


Fig. 10-49

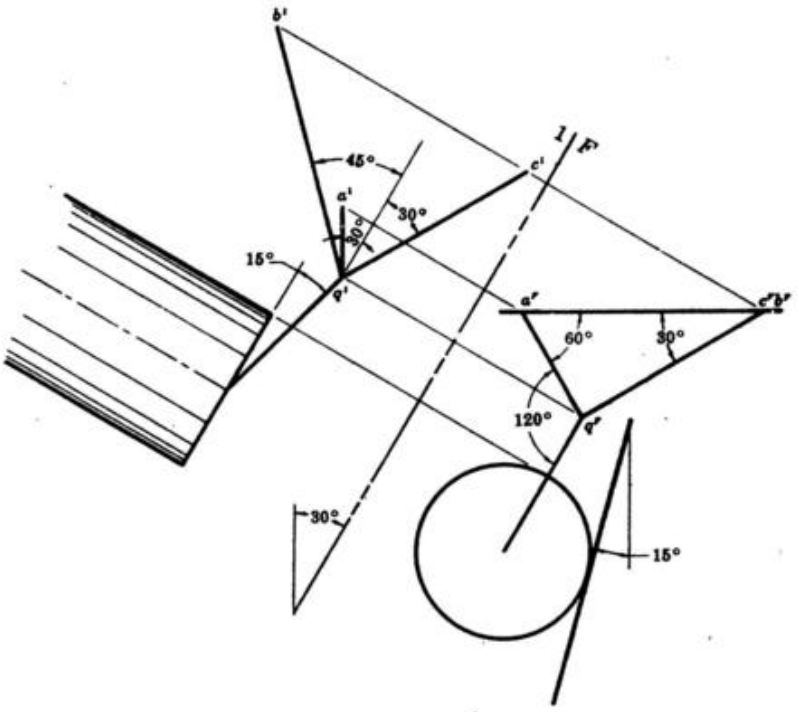


Fig. 10-50

APENDICE

Con frecuencia, en la resolución de problemas de geometría descriptiva se necesitará hacer algunas construcciones planas. Las más comunes se describen e ilustran a continuación. Con toda probabilidad, el estudiante está familiarizado con estos métodos pero la experiencia del autor ha demostrado que estos procedimientos elementales a menudo se olvidan. Debido a esto anexamos estas construcciones para proporcionar al estudiante una fuente de referencia fácil de manejar.

A.1 TRAZAR UNA LINEA PARALELA O PERPENDICULAR A UNA LINEA DADA

Ver la Fig. *A*-1. Sea *XY* la línea dada. Usando una regla *T* y una escuadra cuya hipotenusa deslice a lo largo del filo de la regla *T*, ajuste ambos instrumentos hasta que uno de los catetos de la escuadra coincida con la línea *XY*. Apoye la regla *T* firmemente y deslice la escuadra a lo largo de ella hasta el lugar adecuado y trace la línea *VW* paralela a *XY*, utilizando el mismo cateto de la escuadra. Para obtener una línea perpendicular a la línea dada, use el otro cateto de la escuadra y trace *MP*, perpendicular a *XY*.

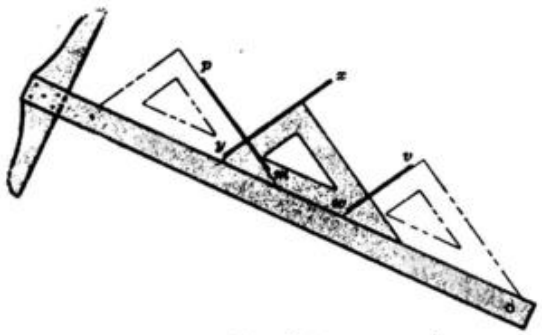


Fig. *A*-1

A.2 DIVIDIR UNA LINEA RECTA EN UN NUMERO CUALQUIERA DE PARTES IGUALES

Ver la Fig. *A*-2. Suponga que se desea dividir la línea *XY* en seis partes iguales. A partir de uno de los extremos de la línea trace una línea de longitud indefinida que haga un ángulo cualquiera con la línea *XY*, por ejemplo, la línea *XZ*. Usando un compás de puntas fijas, tome seis segmentos iguales sobre *XZ* y una el punto 6 con el punto *Y*. Por los puntos 1, 2, 3, 4 y 5 construya líneas paralelas a la línea 6-*Y*. Estas líneas cortarán a *XY* en los puntos 1′, 2′, 3′, 4′ y 5′, que dividen a *XY* en las seis partes iguales solicitadas.

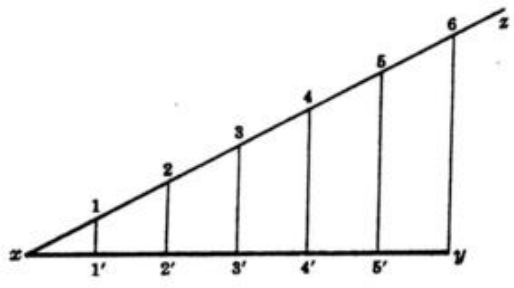


Fig. *A*-2

A.3 TRAZAR EL CIRCULO INSCRITO DE UN TRIANGULO

Ver la Fig. *A*-3. Sea *XYZ* el triángulo dado. Usando un radio arbitrario y uno cualquiera de los vértices del triángulo como centro —por ejemplo *Y*— trace un arco que corte los dos lados del triángulo que forman el ángulo. Utilizando estos dos puntos de intersección, *U* y *V*, como centros, trace dos arcos de igual radio. Trace la línea *YW* hasta el punto de intersección de estos dos arcos, *W*, y prolongue la línea más allá de *W*. Similarmente, construya el ángulo

bisectriz de otro ángulo. Las dos bisectrices se encontrarán en el punto T. Por el punto T trace una línea perpendicular a uno de los lados del triángulo y trace el círculo pedido, utilizando esta distancia como radio y T como centro.

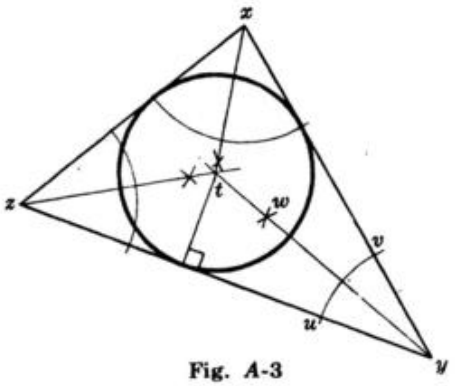


Fig. A-3

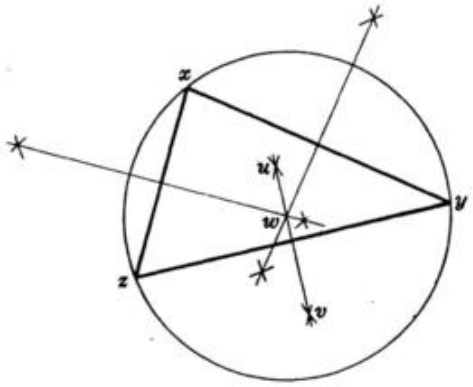


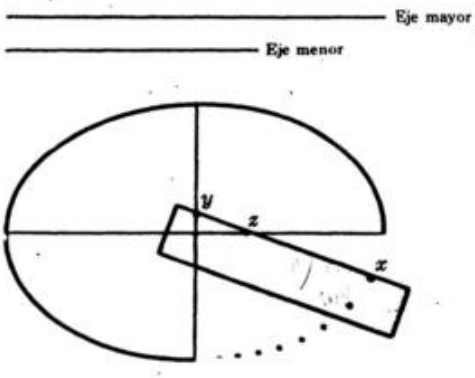
Fig. A-4

A.4 TRAZAR EL CIRCULO CIRCUNSCRITO DE UN TRIANGULO

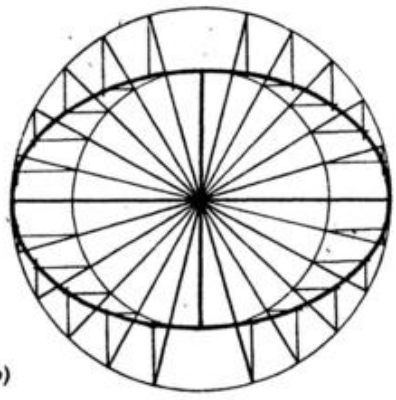
Ver la Fig. A-4. Sea XYZ el triángulo dado. Usando los puntos extremos de un lado cualquiera —por ejemplo Z y Y— como centros y un radio que sea mayor que la mitad de YZ, describa arcos a ambos lados de la línea YZ. Una los dos puntos de intersección de los arcos, U y V, con una línea recta. De una manera similar construya la perpendicular bisectriz de otro lado del triángulo. Las dos líneas bisectrices se encontrarán en un punto W. Usando W como centro y WX, WY o WZ, como radio, dibuje el círculo pedido. Este método se puede utilizar para pasar un círculo por tres puntos cualesquiera que no estén en línea recta.

A.5 TRAZAR UNA ELIPSE APROXIMADA

(a) Método del compás de varas. Ver la Fig. A-5(a). Debe conocerse el eje mayor y el eje menor de la elipse. Dibuje los dos ejes perpendiculares entre sí en sus respectivos puntos medios. Sobre un trozo rígido de papel que tenga un borde recto, tal como una tarjeta de $3'' \times 5''$, marque un punto X. Luego marque otro punto Y, de modo que la distancia XY sea igual a la mitad del eje mayor. A continuación localice un segundo punto Z, de modo que XZ sea igual a la mitad del eje menor. Coloque la tarjeta a través de los ejes, de modo que los puntos Y y Z toquen el eje menor y el eje mayor, respectivamente y marque el lugar donde cae el punto X. Moviendo la tarjeta, de modo que los puntos Y y Z toquen siempre los dos ejes, como se muestra, marque una serie de puntos, del mismo modo. Cuando se hayan localizado suficientes puntos se puede trazar la elipse, utilizando un curvígrafo.



(a)



(b)

(*b*) Método de los círculos concéntricos. Ver la Fig. *A*-5(*b*). Otra vez se debe conocer el eje menor y el eje mayor. Dibuje los dos ejes perpendiculares entre sí en sus respectivos puntos medios y trace dos círculos concéntricos que tengan como centro el punto de intersección de los dos ejes y como radios, la mitad del eje menor y la mitad del eje mayor, respectivamente. Trace una serie de diámetros del círculo mayor, a diferentes ángulos con el eje mayor. Por los puntos donde estos diámetros cortan el círculo pequeño, trace líneas paralelas al eje mayor. Similarmente, por los puntos donde los diámetros encuentran al círculo mayor, trace líneas paralelas al eje menor. El punto de intersección de dos líneas trazadas desde el mismo diámetro será un punto perteneciente a la elipse. Con una serie de puntos localizados de esta forma trace la elipse, utilizando un curvígrafo.

A.6 CONSTRUIR UN POLIGONO REGULAR EN UN CIRCULO DADO

Ver la Fig. *A*-6. Trace un diámetro del círculo y divídalo en tantas partes iguales como lados deba tener el polígono que se pide, en este caso 7. Construya un triángulo equilátero *OA*7′ sobre el diámetro y trace desde el vértice del triángulo *O* una línea que pase por el segundo punto de división del diámetro, 2′. La distancia *X*, desde el punto *A* hasta el punto de intersección *P*, se usa ahora para hallar los vértices del polígono sobre el círculo.

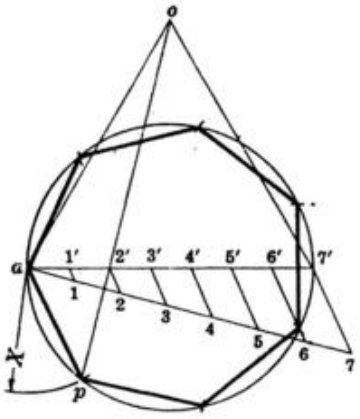


Fig. *A*-6

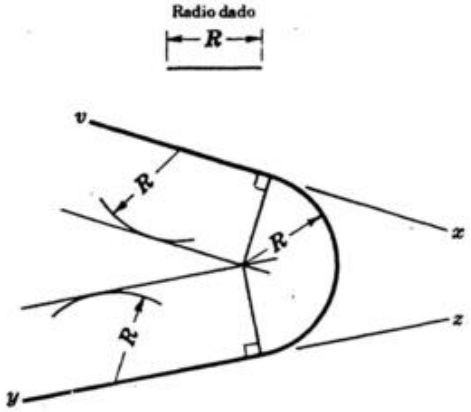


Fig. *A*-7

A.7 TRAZAR UN ARCO DE RADIO DADO, TANGENTE A DOS LINEAS RECTAS

Ver la Fig. *A*-7. Utilizando el radio conocido trace dos arcos, haciendo centros en puntos arbitrarios situados sobre cada una de las líneas y trace dos nuevas líneas paralelas a las anteriores y tangentes al arco. Por el punto de intersección de las nuevas líneas trace perpendiculares a *VX* y *YZ* para localizar los puntos de tangencia. El arco tangente a las dos líneas, que se pide, se traza entre estos dos puntos.

A.8 TRAZAR UNA LINEA TANGENTE A UN CIRCULO DESDE UN PUNTO EXTERIOR

Ver la Fig. *A*-8. Usando la regla *T* y la escuadra conjuntamente, como en el Art. *A*-1, mueva la escuadra hasta que uno de sus catetos pase por el punto *P* y sea tangente al círculo. Deslice la escuadra a lo largo de la regla *T* hasta que el otro cateto pase por el centro del círculo. Este cateto corta ahora al círculo en el punto de tangencia. Marque este punto y trace la tangente que se pide.

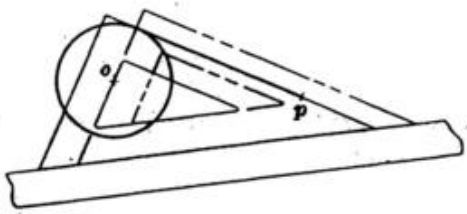


Fig. *A*-8

A.9 DESENVOLVER LA CIRCUNFERENCIA DE UN CIRCULO

Ver la Fig. *A*-9. Trace una línea tangente al círculo en un punto cualquiera *S*. A partir del punto *S* tome tres veces el diámetro del círculo sobre la línea tangente. Trace el diámetro *ST* y el radio *OR*, formando un ángulo de 30° con el diámetro *ST*. Construya *RP* perpendicular a *ST* y trace una línea desde *C* (el extremo de la línea tangente) hasta el punto *P*. Esta distancia es la circunferencia del círculo, con sólo un error de 1/22.000, aproximadamente.

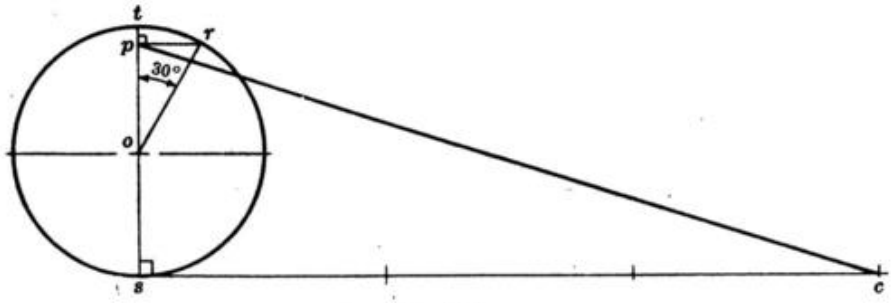
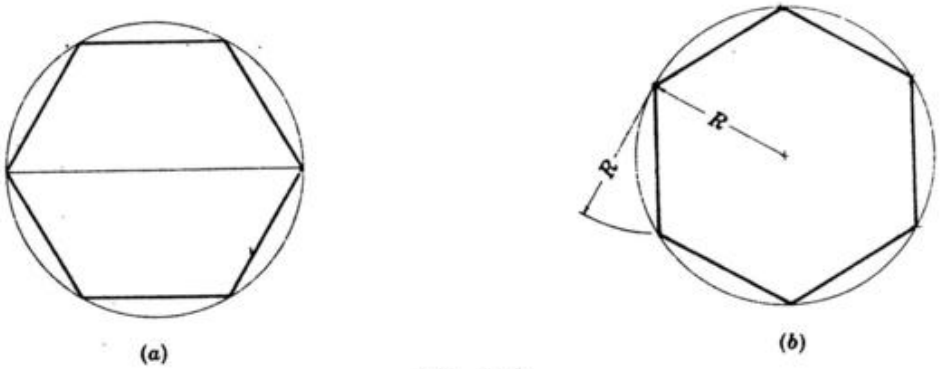


Fig. *A*-9

A.10 CONSTRUIR UN EXAGONO EN UN CIRCULO DADO

(*a*) Método del triángulo. Ver la Fig. *A*-10(*a*). Trace un diámetro del círculo. En cada uno de los extremos de este diámetro, usando la escuadra de 30°-60°, construya cuerdas que formen ángulos de 60° con el diámetro. Finalmente, una los extremos libres de estas cuerdas para completar el exágono.



(*a*) (*b*)

Fig. *A*-10

(*b*) Método divisor. Ver la Fig. *A*-10(*b*). Usando un compás de puntas fijas, con una separación entre estas igual al radio del círculo, trace arcos sucesivos alrededor del círculo y una los puntos de intersección de los arcos con el círculo para formar el exágono.

A.11 MEDIR UN ANGULO POR SU TANGENTE NATURAL

Como se mencionó en el Art. 2.3.1-*B*, el declive de una línea es su pendiente expresada como un porcentaje. En la Fig. *A*-11 la tangente natural del ángulo *ABC* es *CA* dividido por *AB*. Busque este cociente en una tabla de tangentes naturales. El resultado será el valor del ángulo expresado en grados y minutos.

Nota: El procedimiento será inverso si se pide el porcentaje de declive de un ángulo conocido.

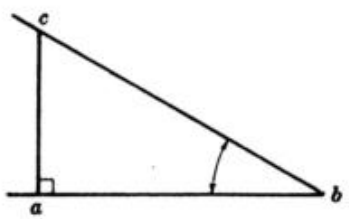


Fig. *A*-11

Bibliografía de textos básicos

Sobre el tema de la geometría descriptiva se han escrito muchos textos excelentes. Con frecuencia la exposición de un autor es más fácil de entender que la de otro. Por este motivo se presenta la siguiente lista de textos básicos, con el fin de que el estudiante pueda consultar otros libros que abarquen adecuadamente un gran número de fases de la geometría descriptiva.

Bradley, H. C., and Uhler, E. H., *Descriptive Geometry For Engineers,* International Textbook Co.

French, Thomas E., and Vierck, Charles J., *Graphic Science,* McGraw-Hill Book Co.

Grant, Hiram E., *Practical Descriptive Geometry,* McGraw-Hill Book Co.

Higbee, F. G., *Drawing — Board Geometry,* John Wiley & Sons, Inc.

Hoelscher, Randolph P., and Springer, Clifford H., *Engineering Drawing and Geometry,* John Wiley & Sons, Inc.

Hood, George J., and Palmerlee, Albert S., *Geometry of Engineering Drawing,* McGraw-Hill Book Co.

Johnson, Lewis O., and Wladaver, Irwin, *Elements of Descriptive Geometry,* Prentice-Hall, Inc.

Paré, E. G., Loving, R. O., and Hill, I. L., *Descriptive Geometry,* Macmillan Co.

Rowe, Charles E., and McFarland James D., *Engineering Descriptive Geometry,* D. Van Nostrand Co.

Schumann, Charles H., *Descriptive Geometry,* D. Van Nostrand Co.

Shupe, Hollie W., and Machovina, Paul E., *Engineering Geometry and Graphics,* McGraw-Hill Book Co.

Street, William E., *Technical Descriptive Geometry,* D. Van Nostrand Co.

Warner, Frank M., and McNeary, Matthew, *Applied Descriptive Geometry,* McGraw-Hill Book Co.

Watts, Earl F., and Rule, John T., *Descriptive Geometry,* Prentice-Hall, Inc.

Wellman, B. Leighton, *Technical Descriptive Geometry,* McGraw-Hill Book Co

INDICE

Adaptador, 148
  desarrollo de un, 148-149
Afloramiento, 165
  determinación del, 166
Angulo,
  bisectriz de un, 207-208
  cálculo del, entre dos líneas que se cortan, 210
  complementario, método del, 104
  del desarrollo de un cono, 146-147
  de reposo, 170
  de pendiente, 4
  diedro, 101
    por revolución, 117-118
  entre una línea y un plano, 103-104
    por revolución, 118
Altura,
  de las líneas de nivel, 166
  de una pirámide, 93
  de un triángulo, 91
  inclinada de un cono, 127
  vertical, 25-26
Arco,
  tangente, 209
  de radio dado, tangente a dos líneas, 209

Bibliografía, 211
Bisectriz de un ángulo, 207-208
Bow, notación de, 187, 199
Buzamiento aparente, 168
  de un plano, 30, 165

Cambio de posición, método del, 4
Cantidad,
  escalar, 181
  vectorial, 181
Cilindro,
  circular recto, 144
    desarrollo del, 144-145
  desarrollo del, 144-145
  elementos extremos del, 134
  oblicuo, 134
    desarrollo del, 145
Cilindros, intersección de, 138-139
Círculo,
  circunferencia del, 145, 209
  circunscrito, 208
  desenvolvimiento del, 210
  exágono en un, 210
  inscrito, 207
  polígono regular en un, 209
Componentes coplanares de un vector, 185
Compresión, 182
Cono,
  altura inclinada del, 127
  ángulo de desarrollo de un, 146-147
  circular recto, 146
    desarrollo del, 146
  desarrollo del, 146-147
  oblicuo, 147
    desarrollo del, 147-148
Coordenada, 12
Costuras, 133
  en láminas metálicas, 133
Cubierta del filón, 164
Curvas de nivel, 3

Declive, porcentaje de, 25-26
Desarrollo,
  de diferentes cuerpos, 142-150
  definición de, 132
  de superficies, 142
  longitud del, 142
  medio, 145-146
  por triangulación, 146, 147, 149
Descomposición de un vector en sus componentes, 185, 188
Desenvolvimiento de la circunferencia, 210
Desmontes y terraplenes, 169
Diagrama,
  de fuerzas, 181
  de longitudes verdaderas, 148
  vectorial, 181
Diámetro del círculo inscrito, 42
Dibujo,
  en varias vistas, 4
  método directo de, 4
  ortogonal, 1
  topográfico, 3
Dirección de la visual, 4
Director, 132
Directriz, 132
Distancia,
  entre planos paralelos, 96-97
  horizontal, 34
  horizontal más corta entre dos líneas que se cruzan, 58
  vertical entre los planos de nivel, 170, 180
Distancia más corta,
  de un punto a una línea, 86-87
  de un punto a un plano, 85
  entre dos líneas que se cruzan, 57
División de una línea en partes iguales, 207

Eje,
  definición de, 132
  de revolución, 115
  horizontal, 117

vertical, 116
Elementos, 132
Elipse aproximada,
método del compás de varas, 208
método de los círculos concéntricos, 209
Equilibrio,
definición de, 182
de fuerzas concurrentes coplanares, 192-193
de fuerzas concurrentes no coplanares, 198, 200
Equilibrante, 181
Escala,
de arquitecto, 13
de ingeniero, 13
utilizada en los problemas, 11-12
Escalar, cantidad, 181
Espacio libre,
entre dos líneas que se cruzan, 63
entre una línea y una esfera, 93
Espesor de una vena, 164-167
Estrato, 164
afloramiento del, 166
espesor del, 164
Exágono en un círculo, 210

Filo, plano de, 29-30
Frontal,
línea, 3
plano, 2
Fuerzas,
concurrentes, 181
en equilibrio (*véase* Equilibrio)
paralelas, 191
resultantes de, (*véase* Resultante)

Generatriz, 132
Geólogo, método abreviado del, 168
Geometría,
descriptiva, 1
vectorial, 181
Girada, vista, 140-142

Imagen, plano de, 1
Inclinación, 26
de un techo, 26
Intersección,
de dos cilindros, 138-139
de dos conos circulares rectos, 141-142
de dos planos, 75-76
de dos prismas, 135-136
de líneas, 29
cálculo del ángulo de, 210
de una línea y un cilindro, 133
de una línea y un plano, 73-74
de un cono y un cilindro, 140
de un cono y un prisma, 137-138
de un plano y un prisma, 134-135
de un prisma y una pirámide, 136-137
de un prisma y un cono, 137-138

Línea,
como un punto, 28
con declive, más corta de un punto a un plano, 88-89
con porcentaje de declive, 25-26
cruzada, 54
de acción, 181
de afloramiento, 166
de altura vertical, 25-26
de desarrollo, 133
de desmonte y terraplén, 169-170
de doblez, 133
de mira, 1, 4
de nivel, 3
de perfil, 22
de pliegue, 2
de recorrido, 25-26
división en partes iguales de una, 207
en un plano, 74
frontal, 3
inclinada, 3
localización de una, 22
longitud verdadera de una, 9-10, 23-26
más corta,
de pendiente dada desde un punto hasta un plano, 88
de pendiente dada entre dos líneas que se cruzan, 58
oblicua, 3, 24
paralela a otra línea, 207
pendiente de una, 4, 25-26
perpendicular a otra línea, 207
perpendicular a un plano, 87
plano de referencia, 2, 6-8
plano perpendicular a una, 89
proyección sobre un plano de una, 85
que corta una superficie (*véase* Intersección)
que hace ángulos dados con dos planos, 119
radial del desarrollo, 143, 146-147
recta, 2
revolución de una, 116
rumbo de una, 3
tangente a un círculo desde un punto, 209
vertical, 3
visualización de una, 9
Líneas,
arco tangente a dos, 209
cruzadas, 54
en verdadera longitud sobre un plano, 29
frontales, 3
horizontales, 3
inclinadas, 3
oblicuas, 3, 24
perpendiculares, 85
Líneas y planos, teoremas sobre, 53-54
Localización,
de la línea de pliegue, 24
de una figura dada en un plano, 31
de una línea (*véase* Línea)
de un círculo en un plano, 31-32
de un estrato, 166
de un punto (*véase* Punto)
Longitud verdadera de una línea, 9-10, 23-26
por cálculo, 24-25
por revolución, 116
Longitud verdadera de un vector, 184
Luz de un techo, 26

Minería, terminología de, 164
Movimiento relativo, 197-198

Norte, dirección del, 3
Notación,
de Bow, 187, 199
diferentes sistemas de, 7-8

Observador, posición del, 4
Ortogonal,
dibujo, 1
proyección, 1

Paralelogramo, método del, 182
Pendiente,
de una línea, 4, 25-26
de un plano, 30
por revolución, 125-126
Perfil, línea de, 3
Perfiles, 169
Perpendicular,
a una línea desde un punto, 86-87
a un plano desde un punto, 85, 87
Perpendicularidad, 85
regla de la, 8
Pirámide,
desarrollo de la, 143-144
oblicua, 144
desarrollo de la, 144
recta, 143
desarrollo de la, 143
truncada, 18, 19
Plano,
buzamiento de un, 30, 165
como un filo, 29-30
de estratificación, 164
de imagen, 1
perpendicular, 8
de perfil, 2
de referencia, 6-8
frontal, 2
horizontal, 1, 10
inclinado, 10-11
inferior de estratificación, 164
línea de un, 74
línea perpendicular a un, 85
oblicuo, 10-11, 29
paralelo a dos líneas, 54
pendiente de un, 30
perpendicular a una línea y que pasa por un punto dado, 89
perpendicular a un plano y que contiene una línea dada, 89
perpendicular a dos planos y que pasa por un punto dado, 90, 98
principal, 2, 4
proyección de una línea sobre un, 85
proyección de un punto sobre un, 85
punto sobre un, 22
que contiene a una línea y es paralelo a una segunda línea, 54-55
que contiene a una línea y a una perpendicular a otro plano, 89
que pasa por un punto y es perpendicular a dos planos, 90
que pasa por un punto y contiene una perpendicular a una línea dada, 89
representación de un, 29
rumbo de un, 165
superior de estratificación, 164
tamaño verdadero de un (*véase* Tamaño verdadero)
topográfico, 176
vista de filo de un, 29-30
visualización de un, 10
vertical, 10
Planos,
ángulo diedro entre dos vistas fundamentales de, 101
cortantes,
horizontales, 138-140
inclinados, 140
verticales, 137
fundamentales, 2, 4
intersección de (*véase* Intersección)
oblicuos, 11, 22
Planos y líneas, teoremas sobre, 53-54
Planta, vista de, 1
Pliegue, línea de, 2
Polígono,
método del, componente, 183
método del, para sumar vectores, 182
regular en un círculo, 209
Porcentaje de declive, 25-26
Posición del observador, 4
Pozo, 164
de sondeo, 164
cruzado, 164, 167
Primer ángulo, proyección en, 5
Prisma,
desarrollo del, 142
oblicuo, 134, 156
que corta a un cono, 137-138
que corta a una pirámide, 136
recto, 135
desarrollo del, 142
Prismas, intersección de dos, 135
Problemas, representación de los, 11
Proyección,
de una línea sobre un plano, 22, 85-86
de un punto sobre una línea, 21, 22
de un punto sobre un plano, 22, 85
en primer ángulo, 5
en tercer ángulo, 5
ortogonal, 1
Puente de armadura, 191
Punto,
de penetración, 73
de una línea en un cilindro, 133
de una línea en un plano, 73-74
línea como un, 28
localización de un, 21
sobre una línea, 21-22
sobre un plano, 22
notación de un, 7-8

proyección de un, sobre un plano, 22, 85
topográfico de referencia, 177
revolución de un, 115-116

Radial, línea de desarrollo, 143, 146-147
Recorrido, 25-26
Reposo, ángulo de, 170
Resultante,
definición de, 181
de vectores, 181-183
Revolución,
de una línea, 116
de un plano, 117
de un punto, 115-116
principios fundamentales de la, 115
Rumbo de una línea, 3
Rumbo y buzamiento de un plano, 164-167

Sección transversal, 142
Sondeo, pozo de, 164
Subida vertical, 25-26
Suma de vectores, 182-184
concurrentes, 182
coplanares, 182
equilibrantes de una, 181
método del paralelogramo para la, 182
método del polígono para la, 182
no concurrentes, 183
no coplanares, 184
resultantes de una, 182, 184
Superficie reglada, 133
Superficies,
alabeadas, 133
de doble curvatura, 133
desarrollo de, 142
de simple curvatura, 133

Tamaño verdadero de un plano, 10, 30
por revolución, 117
Tangente a un círculo, 209
Te, 54
Techo, luz de un, 26
Tensión, 181
Teoremas sobre líneas y planos, 53-54
Tercer ángulo, proyección en, 5
Terraplenes y desmontes, 169
Tierra, corte de sección de la, 169
Topografía, terminología de, 164
Transmisibilidad, principio de, 181, 189
Triangulación,
definición de, 133
desarrollo por, 147, 149
Truncados, sólidos, 143, 147
Túnel, 165

Velocidad, vector, 196
Velocidad relativa, 197-198
Venas, 164, 167
Vector,
definición de, 181
descomposición de un, 185
Vectores,
concurrentes, 181
coplanares, 181
longitudes verdaderas de, 184
no concurrentes, 181
no coplanares, 181
principios básicos sobre, 181-182
suma de, 182-184
velocidad expresada con, 196-198
Vectorial,
cantidad, 181
diagrama, 181
geometría, 181
Vista,
de elevación, 2
auxiliar, 4
de filo, 29-30
de planta, 1
de punta de una línea, 28
frontal, 2, 4
girada, 140-142
inclinada, 2
normal, 4
superior, 1
Vistas,
de elevación auxiliar, 4
disposición de las, 4-6
espaciamiento entre las, 6
fundamentales, 23
las cuatro, 23
las cuatro, fundamentales, 4-7
relacionadas, 8-9
Visualización,
de líneas, 9-10
de planos, 10